mei 2001 ~ nr 7 ~ jaargang 76

In veel Wijsheid...



EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

7

MEI 2001 JAARGANG 76

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Veldzichtstraat 24, 3731 GH De Bilt
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

• goede afdruk met illustraties/foto's/ formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
• platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
• illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter
Drs. M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie

Contributie per ver. jaar: *f* 80,00
Studentleden: *f* 40,00
Leden van de VVWL: *f* 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: *f* 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: *f* 85,00 per jaar.
Voor instituten en scholen: *f* 240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor *f* 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

INHOUD

[Van de redactietafel]

In dit nummer vindt u weer een grote verscheidenheid aan artikelen: Iets over de geschiedenis van het wiskundeonderwijs, te weten de Volksmeetkunde. Verder een verslag van een wiskundetoernooi en een interview met Agneta Aukema, die na vele jaren van grote inzet voor de Vereniging in november jongstleden afscheid nam als bestuurslid van de Vereniging.
Ook in het kader van ICT is er weer een bijdrage, dit keer over ervaringen met het computeralgebra-programma Maple in het HBO. Dat artikel is misschien wel te beschouwen als een voorproefje van de toekomst van de wiskunde ook in de bovenbouw van havo en vwo. De Symbolische Rekenmachine en leerlinggerichte computeralgebra-software komt in steeds sneller tempo binnen het bereik van deze leerlingen.

Examenbesprekingen

In het vorige nummer is het overzicht van de examenbesprekingen meegezonden. Dit overzicht is ook te vinden in Uitleg en natuurlijk ook op de website van de Vereniging: www.nvvw.nl
Vooral nu de examens havo wiskunde A12, B1 en B12 voor het eerst op alle scholen worden afgenomen is het zeer zinvol deze examenbesprekingen te bezoeken.
Als veel docenten deze bijeenkomsten bezoeken dan kan dat bijdragen aan een versnelde vorming van een nieuwe landelijk gedeelde examentraditie. Tevens kan het helpen bij mogelijke discussies met tweede correctoren. Vorig jaar is overigens gebleken op de scholen die toen voor het eerst de nieuwe havo-examens deden, dat over het algemeen genomen het gesprek tussen de correctoren eerder een leerzame uitwisseling van ervaringen was, dan een discussie op het scherpst van de snede. Iedereen verkeert immers nog in enige mate van onzekerheid over hoe de examens uitpakken en hoe de leerlingen precies in alle gevallen beoordeeld moeten worden.

Poster Pythagoras-boom plus boekje

Enige tijd geleden is naar alle leden van de Vereniging de prachtige poster met de Pythagoras-boom gestuurd en apart ook nog een boekje met daarop deze Pythagoras-boom. Er zijn enkele opmerkingen geweest dat sommige daarvan niet of niet goed zijn aangekomen.
Mocht u poster en/of boekje niet ontvangen hebben of niet in goede staat, wilt u dit dan melden aan de ledenadministratie (ledenadministratie@NVvW.nl).

Jubileumboek

Op de een na laatste bladzijde staat nog eens het jubileumboek genoemd, zoals dat is verschenen bij het 75-jarig bestaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Mocht u het nog niet hebben: het is nog steeds te bestellen. Elke wiskundeleraar zou zo'n mooi en waardevol overzicht van de historie van zijn vak in de boekenkast moeten hebben staan.

Zebra-boekje 9 is uit

Inmiddels is alweer het negende Zebra-boekje verschenen: *De Veelzijdigheid van Bollen.*
Bekijk uw collectie thuis eens. Heeft u ze alle negen al?
Het is zo al een zeer interessante collectie van inspirerende wiskunde.

Kees Hoogland

‘In veel Wijsheid is veel Verdriet’

[Danny Beckers]


VOLKS-MEETKUNDE,
OF
ONDERWIJS
TOT NUTTIG GEBRUIK.
MET PLATEN.
UITGEGEVEN DOOR DE
MAATSCHAPPIJ:
TOT NUT VAN 'T ALGEMEEN.
Te AMSTERDAM, bij
CORNS. DE VRIES, HENDK. VAN MUNSTER EN ZOON
EN
JOHANNES VAN DER HEY EN ZOON.
1824.
De prijs is [illegible] cents.

J.W. Karsten 1775-1825 en zijn *Volks-Meetkunde*

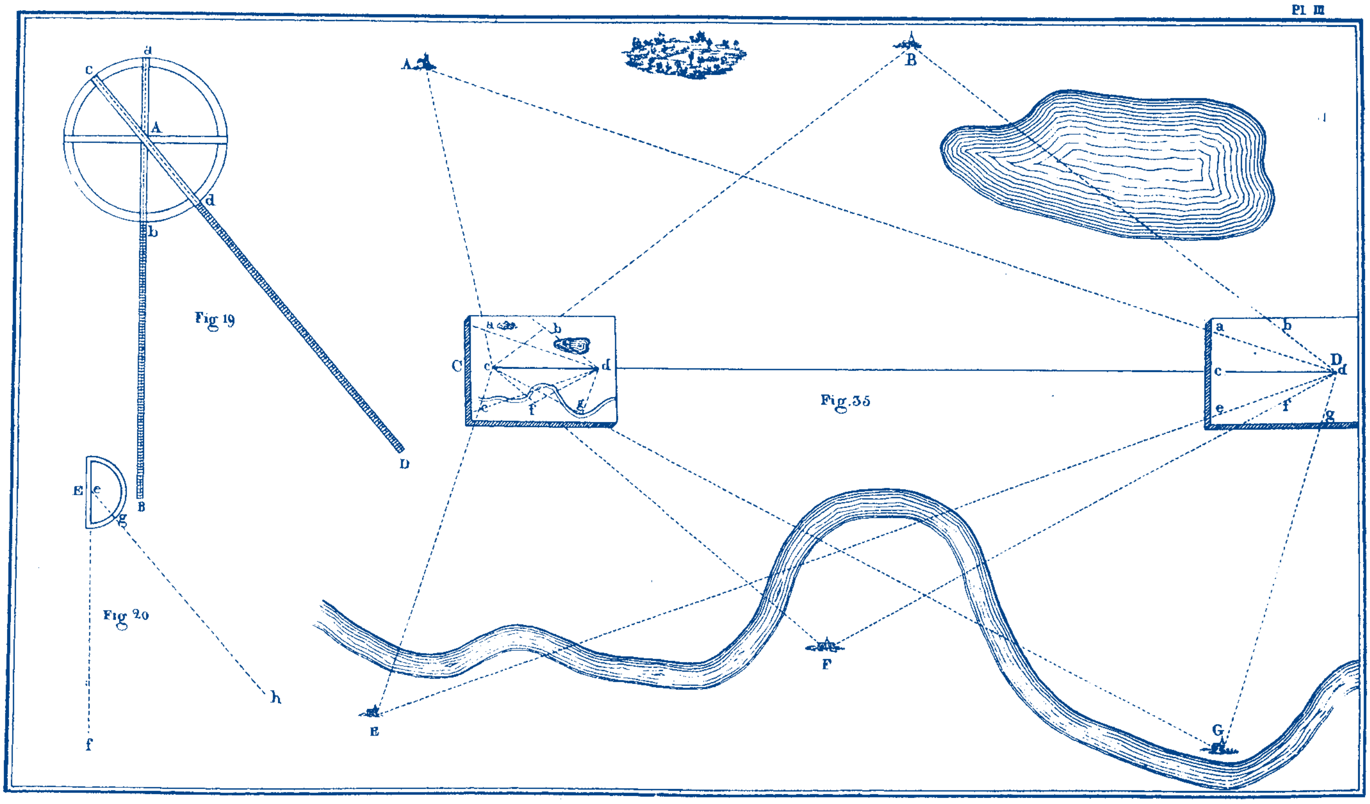
Gedurende de eerste helft van de negentiende eeuw ontstonden veel nieuwe ideeën over het wiskundeonderwijs. Veelal kregen die ideeën ook concreet vorm in de nieuwe lesmethoden die gedurende deze periode het licht zagen. Sommige methoden, zoals die van J. de Gelder (1765-1848), legden de nadruk op een gedegen wetenschappelijke vorming van de leerling. Andere, zoals die van P.J. Baudet (1778-1858), waren iets praktischer van opzet, en vielen daardoor bij sommige kooplieden beter in de smaak [1]. Al met al bestond er een veelheid aan methoden, waarvan sommige ook teruggrepen op achttiende-eeuwse - of nog oudere - voorbeelden [2].
Een van de aardige voortbrengselen van deze 'methoden-hype' is de Volks-Meetkunde van J.W. Karsten: een poging om meetkunde voor iedereen toegankelijk te maken; iets dat sommigen vandaag de dag ook nastreven.

De auteur

Jan Wiedeman Karsten werd geboren in 1775 te Leeuwarden. Zijn ouders waren onbemiddeld, maar geholpen door een oom kreeg hij een baantje bij een landmeter, waar hij als knecht de meetpalen en kettingen moest bedienen. Door zelfstudie klom hij op tot het ambt van hoofdingenieur bij de algemene dienst van rijkswaterstaat. Zijn eerste boek publiceerde hij in 1797. Het betrof een meetkundeboek voor leerling-ingenieurs. In zijn voorwoord gaf hij aan dat hij de meetkunde wilde presenteren samen met haar nuttige toepassingen - als een motiverend element voor de leerlingen. Die motivatie betrok hij alleen op de landmeetkunde [3] - dat was tenslotte zijn vak- hetgeen hem op een reprimande van een recensent kwam te staan: meetkunde deed je toch niet alleen om land te kunnen karteren, meende deze [4]. Zoals zoveel van zijn tijdgenoten werd Karsten lid van de Maatschappij tot Nut van 't Algemeen (in de volksmond: 't Nut). Zijn tweede boek, de *Volks-Meetkunde* uit 1824, zou hij in het kader van een prijsvraag van 't Nut schrijven. Het zou veel gunstiger recensies krijgen. Karsten overleed in 1825, een jaar na het verschijnen van dit boek.

't Nut

't Nut was een charitatief genootschap dat middels lokale afdelingen landelijk opereerde. De leden waren overwegend mensen uit de (hogere) middenklasse, die zich via deze organisatie wilden inzetten ten behoeve van hun minder bedeelde medemens. De Nuts-leden waren ervan overtuigd dat goed onderwijs en een degelijke opvoeding de belangrijkste problemen van de lagere volksklasse (de 'gemene man') zouden oplossen. Met alle goede bedoelingen had 't Nut een sterk paternalistische inslag: in feite was het de bedoeling dat de volksklasse - het (al)gemeen - dezelfde zeden en



gewoonten als de middenklasse zou gaan respecteren. Wanneer lieden uit de lagere klasse verstandige en redelijke afwegingen konden maken, dan zouden zij vanzelf inzien dat het de beschaafde wereld ten goede zou komen wanneer zij behoorlijke manieren leerden, hygiënisch leefden, slemppartijen achterwege lieten, en nuttige vermaken ontplooiden, in plaats van te gokken en te vechten. Het was geenszins de bedoeling om mensen uit hun nederige staat te verheffen; men wilde hoofdzakelijk armoede te bestrijden. De volksklasse moest leren inzien hoe nuttig en rechtvaardig de samenleving was waarin ze leefden, hun eigen rol daarin omarmen, en die met waardigheid vervullen. Met deze Verlichting van het volk zou een belangrijke veroorzaker van pauperisme worden weggenomen.
‘t Nut ontplooide veel initiatieven op het gebied van deze Verlichte armoedebestrijding: tal van volksverzekeringen, de Nutsspaarbank, de Nutsbibliotheek en een aantal Nutsbedrijven waren daar tot voor kort nog stille getuigen van. De meeste activiteiten ontplooide ‘t Nut echter op het gebied van het onderwijs. Onderwijs was voor deze bevlogen maatschappij-verbeteraars immers een eerste vereiste voor een succesvolle Volksverlichting [5].

Prijsvragen

Een van de vormen van onderwijs waar ‘t Nut veel van verwachtte was de zelfeducatie. Veel van de mensen in de doelgroep ontbrak het immers aan tijd en geld om in onderwijs te kunnen steken, maar via de goedkope Nutspublicaties, eventueel gratis te leen in de plaatselijke Nutsbibliotheek, kon men toch op elk vrij moment informatie tot zich nemen.



Om in geschikte boekjes te kunnen voorzien, schreef ‘t Nut ieder jaar prijsvragen uit: er werd dan gevraagd om een eenvoudig toegankelijk boekje over een bepaald onderwerp te schrijven. De winnaar kreeg een medaille en een klein geldbedrag; zijn boekje werd uitgegeven en was tegen een vastgestelde prijs (duidelijk op de omslag vermeld) bij vrijwel iedere boekhandel te krijgen. Een van de eerste boeken die zo op de markt was gekomen was een rekenboek [6]; verder vooral veel werken over zedenkunde en godsdienst.
In 1820 luidde de prijsvraag een ‘volks meetkundeboek’ te schrijven. De winnende inzending bleek van J.W. Karsten te zijn [7] - met zijn achtergrond de ideale auteur voor zo’n boek. Er werden drie versies van het boek uitgegeven. Een versie als prijsexemplaar - boeken als prijzen voor goede leerlingen - waren erg populair in die tijd. Deze versie had grote fraaie platen. Om de kosten te drukken - een belangrijk deel van de kosten van de Nutsboekjes werd door het genootschap zelf gedragen - werd tevens een handelseditie in kleiner formaat en met kleine platen vervaardigd: 4 uitklapbladen in plaats van de 8 in het prijs-exemplaar. Tot slot verzorgde de Waalse afdeling van ‘t Nut een Franse vertaling [8]. Voor zover bekend werd geen van de edities ooit herdrukt - de interesse van het volk voor meetkunde was kennelijk niet zo overweldigend. Dat maakt het boekje op zich echter niet minder interessant.

De Volks-Meetkunde

Karsten schreef zijn *Volks-Meetkunde* geheel in de vorm van dialogen tussen een heer en zijn tuinman.

Aanleiding voor deze serie gesprekken over meetkunde was de verbazing van de tuinman over het werk van de landmeters die in het dorp aan het werk waren geweest. De tuinman vertelt zijn heer dan dat hij in het verleden wel eens een leerboek meetkunde had open geslagen, maar dat het veel te moeilijk voor hem was. De heer beaamt dat de meeste meetkundeboeken tamelijk lastig zijn, maar prijst de leergierigheid van de tuinman en biedt aan hem te leren hoe hij het werk van de landmeters moet beoordelen. Tenslotte zijn de belastingen die de tuinman over zijn hofje moet betalen, gebaseerd op deze metingen, en dus moet hij ze kunnen controleren. De tuinman neemt deze lessen van harte aan.
De eerste 'les' vindt plaats naar aanleiding van een gesprekje over een paardenrace. De tuinman was getuige van de race, maar constateerde dat die niet erg spectaculair was aangezien de dieren vermoeid raakten omdat ze zo'n grote afstand moesten afleggen:

> DE TUINMAN. [...] de baan was wel acht honderd treden, van den eenen slagboom tot den anderen.
> DE HEER. Zoo! dan hebt gij de lengte van deze baan gemeten? Gij verstaat dus reeds een deel der Meetkunde?
> DE TUINMAN. Als gij dat meten noemen wilt, Mijnheer! ja, dan ben ik ook een Landmeter, ten minste een wegmeter; maar zulk meten verstond ik reeds voordat ik lezen en schrijven geleerd had; hoe dikwijls heb ik niet, als jongen op de straat spelende, op deze of dergelijke wijze gemeten!
> DE HEER. Zeer natuurlijk, want de menschen worden Meetkunstenaars geboren, en hebben ook de Meetkunde gedurig noodig, om het eene met het andere te vergelijken, om eene goede keus te doen, of den prijs der koopwaren te bepalen. [...] Meet niet ieder man, iedere vrouw, ieder kind, zonder zich daarover veel te bedenken, vlug en met gemak; -met meerdere of mindere naauwkeurigheid, al naar gelang der omstandigheden? [9]

Op deze wijze gaan de gesprekken voort. De tuinman heeft aan het eind van het boek niet alleen een aantal kaarten van de omgeving getekend, maar heeft tevens kennis gemaakt met het (op dat moment nieuwe) metrieke stelsel. Verder is hij in staat om de oppervlakte van veelhoeken en de inhoud van een aantal regelmatige lichamen uit te rekenen, en heeft hij kennis gemaakt met de onderdompel-truc voor het bepalen van het volume van een onregelmatig object. Ten slotte berekent de tuinman een schatting voor de inhoud van de aardbol.

Wijsheid en verdriet

Bij die laatste exercitie gaat het duidelijk niet meer om praktisch nut. Alle andere onderwerpen die Karsten de revue laat passeren hebben een praktisch-realistische aanleiding. Dit laatste onderwerp heeft zuiver de verwondering van de tuinman als aanleiding: hoe is het toch mogelijk dat er mensen zijn die dat kunnen. De heer onttovert de realiteit voor de tuinman. De formule voor de inhoud van een bol die hij daarbij gebruikt wordt overigens niet bewezen. Dat hoeft ook niet, vindt de tuinman: hij vindt het wel mooi geweest. De heer is het roerend met hem eens:

> DE TUINMAN. Ik heb thans waarlijk niets meer te verlangen, Mijnheer! ik dank u nogmaals voor het gegeven onderwijs; de kundigheden, die ik daardoor heb opgedaan, zullen mij, denk ik, nog menigmaal te stade komen.
> DE HEER. Dat zullen zij; -maar, nog eens, vergenoeg u ook daarmede, en tracht niet verder te gaan. -Deze afmaning bedoelde ook voorzeker de wijze Koning SALOMO, als hij zeide, in zijnen Prediker:
> *In veel wijsheid is veel verdriet.* [10]

Dit fragment illustreert fraai hoe ver de Volksverlichters van 't Nut wilden gaan met hun educatie: het was geenszins de bedoeling dat de tuinman geleerde-aspiraties zou ontwikkelen, maar hij moest genoeg weten om zich aan de vooruitgang te kunnen vergapen, en een beschaafd mens te kunnen worden. Het belerende aspect komt elders in het boek ook goed tot uitdrukking. Als de buurman van de tuinman ter sprake komt, wordt diens platte vermaak (hij speelt kaart, rookt en drinkt) door de heer veroordeeld. De tuinman vergoelijkt zijn buurman, door te berde te brengen dat niet iedereen het geluk heeft om een heer te treffen die hem helpt in zijn onderwijs. Maar de heer is onverbiddelijk: ook de buurman zou zijn tijd nuttig kunnen besteden in de bibliotheek van 't Nut. Verder maakt de heer de tuinman er geregeld op attent dat hij vooral geen wiskundige moet worden, omdat hij dan wellicht zijn taken niet meer naar behoren doet, en ongelukkig zou kunnen worden in zijn huidige staat: *Schoenmaker blijft bij uw leest*, houdt de heer zijn tuinman voor [11].

Didactiek

Ondanks het feit dat de tuinman geen geleerde hoefde te worden, maakt Karsten het zichzelf helemaal niet gemakkelijk: naar het ideaal van de wiskunde-onderwijzers uit die tijd moest de lezer begrip worden bijgebracht van de stof. De uitzonderlijk leergierige tuinman stelt hele slimme vragen, maar begrijpt niet automatisch alles dat zijn leermeester hem vertelt. Karsten lijkt zijn werk erg serieus te hebben genomen, en daadwerkelijk de moeilijke onderdelen van zinvolle uitleg te hebben willen voorzien. Bovendien geeft de heer ook geregeld aan wat de motivatie is om bepaalde onderwerpen te bekijken.
Zo verklaart de heer bijvoorbeeld het metrieke stelsel. Dat was een omstreden nieuwigheid die sinds 1820 bij Koninklijk Besluit aan het hele land was opgelegd. De lokale maten- en gewichtenstelsels, die vaak al eeuwen in gebruik waren, werden in een klap vervangen door een nieuw, op het tientallig stelsel gebaseerd systeem.

De heer laat zien dat het in verband met de tientallige schrijfwijze van getallen heel prettig is om het metrieke stelsel te gebruiken [12].
Is er bij de introductie van het metrieke stelsel een sterke propagandistische ondertoon te bespeuren - de afschaffing van de oude stelsels wekte nogal wat wrevel [13] - dat is duidelijk niet het geval bij het berekenen van oppervlaktes. De heer geeft een zeer concrete aanleiding om oppervlaktes te willen berekenen: hoeveel koolplanten kan ik in mijn tuin kwijt. De tuinman weet dat alle koolplantjes een halve meter uit elkaar moeten worden gezet (in vierkantjes) om ze goed te kunnen laten groeien. Nadat hij heeft gekeken hoeveel koolplanten er in de lengte en breedte van zijn rechthoekige tuin passen wordt er gerekend, en introduceert de heer het begrip oppervlakte door de aandacht van de tuinman te richten op de vloerbedekking in zijn kamers. Op de koolplantjes wordt weer teruggegrepen wanneer de oppervlakte van een parallellogram dient te worden bepaald. In eerste instantie berekent de tuinman desgevraagd de oppervlakte van een parallellogram foutief, namelijk: door eenvoudig de beide zijdelengtes met elkaar te vermenigvuldigen. De heer laat zijn tuinman terugkeren naar de koolplantjes; het aantal plantjes berekent de tuinman wel juist, waarop de heer hem laat opmerken dat hij het aantal koolplantjes heeft bepaald door langs een loodlijn te tellen [14]. Op die wijze draagt de aanschouwelijke introductie steeds bij tot goed begrip van de meer abstracte meetkundige waarheden.
Wanneer de heer dingen bespreekt die voor de tuinman niet met het gewone boerenverstand te bevatten zijn, zoals de formule voor de oppervlakte van een bol, dan benadrukt hij dat door te zeggen dat dit meer wiskunde vereist dan voor een tuinman nodig is om gelukkig te kunnen leven, en dat hij hem daarin maar moet geloven [15].

Tot slot

De *Volks-Meetkunde* van Karsten is een erg fraaie en aardige poging van de middenklasse uit de eerste helft van de negentiende eeuw om enige elementaire meetkundige noties (waaronder het omstreden metrieke stelsel) onder het gewone volk te brengen. Dat op zich is reeds opmerkelijk: ook een gewone tuinman moest toch een notie hebben van meetkunde. Het boek van Karsten heeft alle paternalistische en idealistische karaktertrekken in zich die de lectuur van de Volksverlichters kenmerkt. De naïeve (maar aantrekkelijke) gedachte dat we eigenlijk allemaal wel weten waar het in de meetkunde om gaat, en dat het een kwestie is van expliciteren van 'vanzelfsprekendheden', leefde bij Karsten zeer sterk. Zijn ideeën, die door een groot aantal medeleden van 't Nut werden gedeeld, mogen misschien niet die invloed op de volksmassa's hebben gehad die hij van zijn boek verwacht had - Karsten's idealen waren desalniettemin erg nobel en ze leverden een stukje werk op dat ook heden ten dage nog zeer lezenswaardig mag worden genoemd.

Noten

[1]
Zie: 'Jacob de Gelder en de didactiek van de wiskunde' in: Euclides 71 nr. 8 (juni 1996), pp. 254-262; en 'P.J. Baudet en de didactiek van de wiskunde' in: Euclides 75 nr. 2 (oktober 1999), pp. 39-46
[2]
Met name de methoden van A.B. Strabbe, Willem Bartjens en Adam van Lintz bleven tot diep in de negentiende eeuw populair.
[3]
J.W. Karsten, Handleiding tot de kennis der meetkunde, Leyden (1797); tweede editie: Amsterdam (1849)
[4]
Algemene Vaderlandsche Letteroefeningen 1798-I, pp. 68-69
[5]
W.W. Mijnhardt & A.J. Wichers, Om het algemeen Volksgeluk, Edam (1984)
[6]
H. Aeneae, Rekenboek voor de Nederlandsche Jeugd, Leiden / Amsterdam (1791-1794)
[7]
Inzending en beoordeling van de prijsvragen geschiedde anoniem. Elk werk werd door de auteur voorzien van een zinspreuk en een dichtgelakte envelop met diezelfde zinspreuk gemarkeerd. In de envelop zat de naam van de auteur.
De envelop van het winnende manuscript werd geopend; de andere enveloppen werden publiekelijk verbrand. Gemeente Archief Amsterdam, Archief hoofdbestuur 't Nut, inv.nr. 1195.
[8]
J.W. Karsten, Volks-Meetkunde of Onderwijs tot nuttig gebruik, Amsterdam (1824).
De prijsuitgave werd op groot octavo gedrukt; de editie voor de verkoop was op klein octavo gedrukt en vermelde op de titelpagina de prijs van 65 cent. Deze handelseditie is vandaag de dag veel zeldzamer; geciteerd wordt uit een prijsexemplaar. De Franstalige editie: Géométrie pratique, a l'usage du peuple, Brussel (1826)
[9]
J.W. Karsten, Volks-Meetkunde, pp. 6-7
[10]
ibidem, p. 128
[11]
ibidem, respectievelijk pp. 68-69, p. 94
[12]
ibidem, pp. 9-17
[13]
Uiteraard zit er tevens een didactisch probleem aan de introductie van het metrieke stelsel die mijns inziens door de tijdgenoten werd onderschat: de oude stelsels hadden een eenvoudig uitgangspunt: lengtes, oppervlaktes, inhouden, gewichten e.d. hadden elk een eigen eenheid en een aantal op die eenheid gebaseerde veelvouden die een andere naam droegen. In het metrieke stelsel was de lengtemaat tevens grondslag voor de andere maten en dat vereist enig meetkundig inzicht: alle vierkanten (kubussen) geconstrueerd op dezelfde lengtemaat hebben dezelfde oppervlakte (inhoud) en dergelijke stellingen.
[14]
ibidem, pp. 37-42
[15]
ibidem, p. 119

Scholieren strijden op KUN-wiskundetoernooi

[Mascha Honsbeek]



Vrijdag 22 september 2000 organiseerde de subfaculteit wiskunde van de Katholieke Universiteit Nijmegen voor de negende achtereenvolgende keer het KUN-wiskundetoernooi. 's Ochtends kwamen zo'n 330 VWO-leerlingen van 30 Nederlandse en 1 Duitse school met hun leraren naar de universiteit in Nijmegen.

Individuele wedstrijd

Na de ontvangst met koffie en thee gingen de deelnemers naar de grote collegezalen waar ze zich een uur lang bogen over de acht opgaven van de individuele wedstrijd. Intussen zaten alle docenten bij elkaar in de kantine, ook druk bezig met het oplossen van de opgaven, omdat ze wel wisten dat ze in de pauze met vragen overladen zouden worden. Voor de opgaven in het toernooi is weinig wiskundige voorkennis vereist. De derde opgave van de individuele wedstrijd zou je bijvoorbeeld zo in een puzzelboekje tegen kunnen komen:

Opgave
Vervang elk van de vier letters door een cijfer ongelijk aan 0 - verschillende letters door verschillende cijfers - zó dat een correcte vermenigvuldiging ontstaat.

$AB \times GB = DDD$

Maar ook de meetkundekennis wordt getest:

Opgave
Zie figuur 1. Driehoek ABC is rechthoekig in A.
De zwaartelijnen BD en CE zijn 9 cm en 12 cm lang.
Hoe lang is de derde zwaartelijn?

Meteen na dit onderdeel keken medewerkers van de universiteit de opgaven na. Dit jaar ging de gedeelde eerste plaats naar Stijn Meurkens en Rob van de Westelaken, respectievelijk van het Elzendaalcollege te Boxmeer en het Gymnasium Beekvliet te St. Michielsgestel. Zij hadden zeven van de acht opgaven goed. De tweede en derde plaatsen waren voor scholieren van het Lorentz-Casimir Lyceum uit Eindhoven en het Gymnasium Apeldoorn.

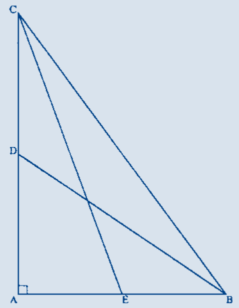
Estafettewedstrijd

Na de lunch was de estafettewedstrijd. De bedoeling van dit onderdeel is dat de scholieren in teams van 4 of 5 in een uur tijd samen zoveel mogelijk punten scoren. Er zijn maximaal 20 opgaven van ieder 20 of 30 punten. Bij elk team zit een jurylid, een medewerker van de subfaculteit wiskunde of een docent die meegekomen is met een ander team. Deze geeft dit team de opgaven en kijkt ze na. Een volgende opgave wordt pas gegeven als de opgave ervoor goed beantwoord is of door het team is opgegeven. Verder mogen er per opgave meestal drie pogingen gedaan worden om te antwoorden.
Samenwerking en tactiek spelen dan ook een grote rol in dit onderdeel, vooral ook omdat 20 opgaven erg veel is voor een uur.
Sommige teams zijn hier heel handig in; zo kwam een team binnen een paar seconden met de oplossing van het volgende probleem:

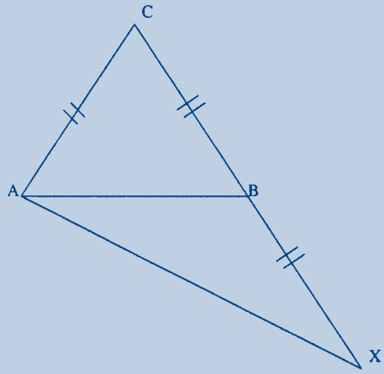
Opgave
Zie figuur 2. Driehoek ABC is gelijkbenig; de zijden AC en BC zijn even lang.
De zijde GB is bij B verlengd met het lijnstuk BX dat even lang is als de zijde BC. Nu blijkt hoek X van de driehoek ACX half zo groot te zijn als hoek C van de driehoek ACX. Bereken de hoeken van driehoek ABC.

Naar het plaatje kijkend hadden ze geconcludeerd dat de driehoek ABC wel eens gelijkzijdig zou kunnen zijn. Snel narekenen van de hoeken van ACX in deze situatie leverde het 'bewijs' dat de ingeving goed was. Zo konden ze snel verder met de volgende opgave. Hierbij lieten ze een mooi stukje samenwerking zien.

Opgave
Welke priemmachten p^k zijn precies 16 keer zo groot als het aantal van hun delers?



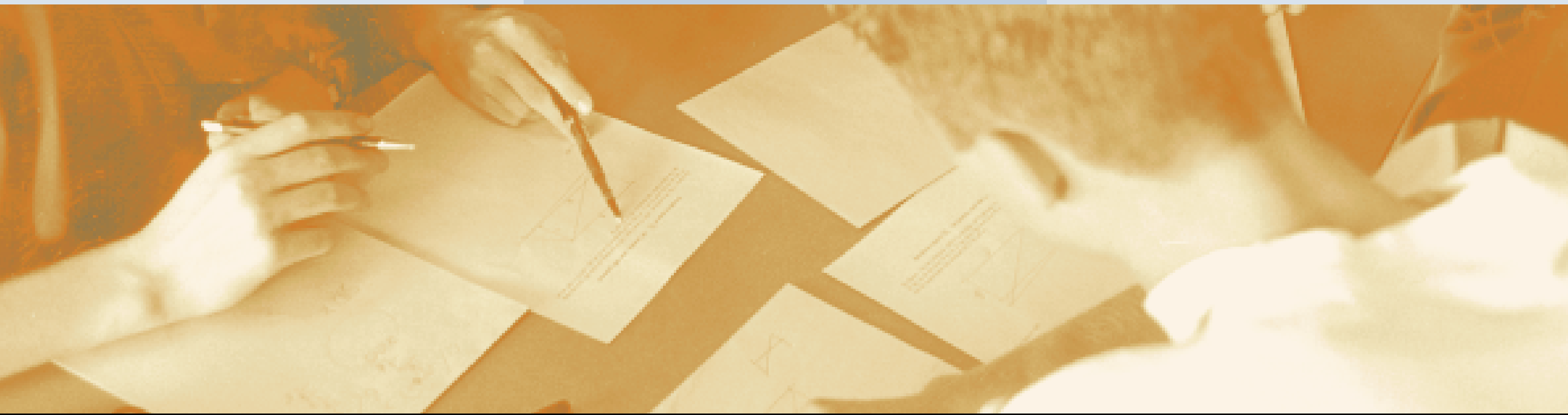
1



2

2	1	1	2
0	2	3	0
2	2	1	2
1	2	2	1

3



Voor sommige groepen bleek deze opgave te moeilijk omdat ze niet begrepen wat een priemmacht was. Bij een van de teams meteen geroepen: 'p^k is een 16-voud, dus p moet wel 2 zijn'. Een ander teamlid legde uit hoe je het aantal delers van zo'n priemmacht moest tellen. Daarna was het antwoord snel gevonden en na een korte blik op het scorebord waren de scholieren alweer verdiept in de volgende opgave.

Prijsuitreiking

Ook na het eindsignaal bleef het nog spannend. Team 1 van het NSG te Nijmegen had 310 van de 500 punten behaald en was daarmee het beste team op de scoreborden. Maar hoe was het met team 2 van het Lorentz-Casimir Lyceum uit Eindhoven? Zij hadden 280 punten op het scorebord staan en hadden net het antwoord van hun laatste vraag van 30 punten opgeschreven en ze wilden dit juist aan hun jurylid overhandigen. De organisatie besloot aan beide teams een eerste plaats toe te kennen. De derde plaats was voor team 1 van het Marnix College te Ede. De scholieren van deze teams en de besten van de individuele wedstrijd kregen bij de prijsuitreiking een t-shirt en een certificaat als aandenken.

Volgend jaar

We hopen ook in 2001 bij het 10-jarig jubileum van het KUN-wiskundetoernooi, traditioneel georganiseerd op de vierde vrijdag van september, weer veel deelnemers te mogen begroeten.

De opgaven van de afgelopen jaren zijn - met uitwerkingen – on line beschikbaar op:

Verdere informatie kan verkregen worden bij het secretariaat wiskunde: 024-3652986.
Hier kan men zich ook opgeven voor deelname.

Elk jaar is het weer een hoop werk om goede opgaven te verzinnen. Suggesties zijn dan ook van harte welkom.

Toegift

Nog wat andere opgaven uit de wedstrijd.

Opgave
Hoe groot moet de straal van een rond bord zijn, opdat je er zeven ronde stroopwafels op kunt leggen zonder dat ze over de rand uitsteken of gedeeltelijk op elkaar liggen? (De straal van een stroopwafel is 3 cm).

Opgave
Zie figuur 3. Maak sommige vakjes zwart, zó dat voor elk vakje het getal dat erin staat, precies aangeeft hoeveel zwarte vakjes eraan grenzen.
'Eraan grenzen' betekent: er een zijde mee gemeen hebben.

Vlakke meetkunde

[Floor van Lamoen]

Een over de wereld verspreide groep meetkunde-enthousiastelingen heeft het internettijdperk aangegrepen om een elektronisch tijdschrift op te richten.
Het tijdschrift heet 'Forum Geometricorum' en wordt mogelijk gemaakt door de Florida Atlantic University in Boca Raton (USA).
De bedoeling is meetkunde-artikelen van hoge kwaliteit te presenteren (ze ondergaan 'peer review'), maar tegelijk leesbaar voor een tamelijk breed publiek, zoals geïnteresseerde leraren.
Een naam die onvermijdelijk valt in zo'n tijdschrift is die van Oene Bottema, welbekend bij oudere lezers van Euclides.
Een van de 'Verscheidenheden' die hij voor Euclides schreef [1], is door mij in het Engels vertaald en in Forum Geometricorum verschenen: The Malfatti Problem.

Forum Geometricorum is te vinden op *http://forumgeom.fau.edu/*

Noot

[1] O. Bottema, Verscheidenheid XXVI: Het vraagstuk van Malfatti, Euclides, 25 (1949-50) p. 144–149.
Hetzelfde artikel is ook opgenomen in de bundel 'Verscheidenheden' (p. 31-36), uitgegeven door de NVvW in 1977 ter gelegenheid van de publicatie van Bottema's honderdste Verscheidenheid in Euclides.

Over de auteur

Floor van Lamoen (e-mail: f.v.lamoen@wxs.nl) is als leraar wis- en informatiekunde verbonden aan het St. Willibrordcollege te Goes.

Forum Geometricorum
Volume 1 (2001) 43–50.

FORUM GEOM
ISSN 1534-1178

The Malfatti Problem

Oene Bottema

Abstract. A solution is given of Steiner's variation of the classical Malfatti problem in which the triangle is replaced by three circles mutually tangent to each other externally. The two circles tangent to the three given ones, presently known as Soddy's circles, are encountered as well.

In this well known problem, construction is sought for three circles C_1', C_2' and C_3', tangent to each other pairwise, and of which C_1' is tangent to the sides A_1A_2 and A_1A_3 of a given triangle $A_1A_2A_3$, while C_2' is tangent to A_2A_3 and A_2A_1 and C_3' to A_3A_1 and A_3A_2. The problem was posed by Malfatti in 1803 and solved by him with the help of an algebraic analysis. Very well known is the extraordinarily elegant geometric solution that Steiner announced without proof in 1826. This solution, together with the proof Hart gave in 1857, one can find in various textbooks. Steiner has also considered extensions of the problem and given solutions. The first is the one where the lines A_2A_3, A_3A_1 and A_1A_2 are replaced by circles. Further generalizations concern the figures of three circles on a sphere, and of three conic sections on a quadric surface. In the nineteenth century many mathematicians have worked on this problem. Among these were Cayley (1852) , Schellbach (who in 1853 published a very nice goniometric solution), and Clebsch (who in 1857 extended Schellbach's solution to three conic sections on a quadric surface, and for that he made use of elliptic functions). If one allows in Malfatti's original problem also escribed and internally tangent circles, then there are a total of 32 (real) solutions. One can find all these solutions mentioned by Pampuch (1904). The generalizations mentioned above even have, as appears from investigation by Clebsch, 64 solutions.

Werken vanuit een cybercafé aan Las Ramblas in Barcelona? Het is maar een van de voordelen die de inzet van de teleleeromgeving Blackboard op de universitaire lerarenopleiding van het ICLON voor mij heeft. De andere voordelen zijn echter minder exotisch. Dit artikel geeft een overzicht van hoe Blackboard wordt gebruikt als ondersteuning bij de cursus vakdidactiek wiskunde die ik daar verzorg. En passant probeer ik ook te schetsen hoe deze cursus in elkaar zit en wie de cursisten zijn.

In verband met de lengte van dit artikel wordt het gespreid over twee nummers van Euclides. In dit nummer komen vooral de verschillende mogelijkheden van Blackboard aan bod; in het volgende de cursisten, de gehouden evaluatie en de conclusie [1].

Vakdidactiek in Cyberspace, deel 1

[Hans Wisbrun]

De beste manier om, als lezer van dit artikel, een kijkje in de keuken van vakdidactiek wiskunde te nemen is natuurlijk door zelf het internet op te gaan. De URL is *http://blackboard.leidenuniv.nl/courses/vdw2000*
U kunt tijdelijk (!) naar binnen met als 'User Name' *razend* en als 'Password' *nieuwsgierig*. Alleen kijken, niet aankomen, alstublieft!

Waarom schrijf ik dit artikel? Allereerst vanuit enthousiasme. Zo lang werk ik nog niet met Blackboard (vanaf september 2000), maar de ervaringen tot nu zijn goed. Mijn cursisten hebben boven verwachting meegeholpen om Blackboard tot een succes te maken. Zo zijn er bijvoorbeeld met ongeveer 20 ingeschrevenen binnen een half jaar meer dan 15000 'accesses' geteld. Maar waarom schrijf ik in Euclides, een vakblad voor wiskundeleraren? Omdat ik de stellige overtuiging heb dat Blackboard of een andere teleleeromgeving (zie verderop) ook een bijdrage zou kunnen leveren aan het wiskundeonderwijs in de Tweede fase, met name bij de begeleiding van praktische opdrachten, profielwerkstukken en de activiteiten in de zogenoemde zebrablokken. Maar wellicht ook bij de 'gewone' lessen zelf. In de volgende Euclides kom ik hier op terug. Wel zou ik nu al willen vragen u bij het lezen steeds af te vragen: kan ik me hier iets bij voorstellen voor mijn eigen lespraktijk?

Voor de duidelijkheid: Blackboard is in dit stadium op het ICLON geen vervanging van de bijeenkomsten. Het is een hulpmiddel dat er langs ligt, als een steeds kloppende aorta. Soms kan een opdracht helemaal

zonder contactonderwijs gemaakt worden, maar dit cursusjaar is slechts 10% van de bijeenkomsten volledig vervangen door Blackboard-activiteiten.

Wat is Blackboard?

Blackboard is een verzameling besloten cursussites op internet. Blackboard afficheert zich als een teleleeromgeving. Ik vind dat zelf een erg duur woord. Bij dat woord denk ik aan een omgeving waar je nauwelijks buiten hoeft te komen om via internet te kunnen leren. Alles wat je nodig hebt zou er in moeten zitten. Dat is bij de huidige generatie elektronische leeromgevingen, zoals ze ook wel genoemd worden, niet het geval. Blackboard is een plek op het internet waar een aantal foefjes die al eerder bestonden op een slimme manier bij elkaar zijn gezet. E-mail, discussiëren via internet, bestanden up- en downloaden, informatievoorziening, het is allemaal al eens eerder vertoond. Blackboard zet al die mogelijkheden op een overzichtelijke manier en in onderwijstaal bij elkaar. Er zijn meer elektronische leeromgevingen. Een in Nederland bekende naam is TeleTop, ontwikkeld door de Universiteit Twente. Maar er zijn er meer: surf bijvoorbeeld maar eens naar de site *http://platform.leidenuniv.nl/links.html*, daar staan er een aantal op een rijtje. Verder publiceert het Cinop een vergelijkend warenonderzoek van teleleeromgevingen: *http://www.teleleerplatforms.nl*

Naar de knoppen

Blackboard is een Amerikaans product, dat zie je er zo aan af: helder, overzichtelijk, maar nogal recht-toe-recht-aan en wat navigatie en vormgeving betreft weinig flexibel. De Universiteit Leiden heeft een licentie, de server staat in Delft, maar aan de knoppen komen, dat mogen we hier niet. Dat bedoel ik in dit geval letterlijk: de namen op de knoppen zijn in het Engels en daar moet je het als docent en cursist mee doen. Dus cursusinformatie heet Course Information, gereedschap voor de cursisten heet Student Tools, enzovoort. Take it or leave it! Dat betekent dat er in de Communication met mijn cursisten wel eens wat Amerikaans onderwijsjargon sluipt. Ik probeer wel altijd een zo goed mogelijke Nederlandse vertaling te vinden, zoals Discussielijntje voor Discussion Thread, maar zeker nieuwkomers willen gewoon weten op welke knop ze moeten drukken en dan is het soms handiger om de Engelse term te gebruiken. Vandaar ook dat ik in dit artikel de Engelse termen voor de knoppen gebruik.

Met die knoppen en lege pagina's begin je als docent, verder staat er bij het prille begin weinig voor je klaar, behalve een linkje hier en daar naar het Blackboard-bedrijf. Nu startte ik zelf niet helemaal bij nul: een aantal ICLON-collega's waren mij op bescheiden schaal voorgegaan en naar hun successen en mislukkingen heb ik goed geluisterd.

Welke knoppen zijn er? Van boven naar beneden (zie figuur 1 op p. 266) zijn voor de cursist in beeld: Announcements, Course Information, Staff Information, Course Documents, Assignments, Communication, External Links en Student Tools. Als beheerder heb ik nog de knop Control Panel tot mijn beschikking, maar die zien u en de cursisten lekker niet. En verder zijn er nog wat minder relevante knoppen. In het openingsbeeld verschijnen ook altijd direct de Announcements zelf.

Hieronder beschrijf ik wat er onder elk van de knoppen te vinden is en welke keuzes ik bij het inrichten heb gemaakt.

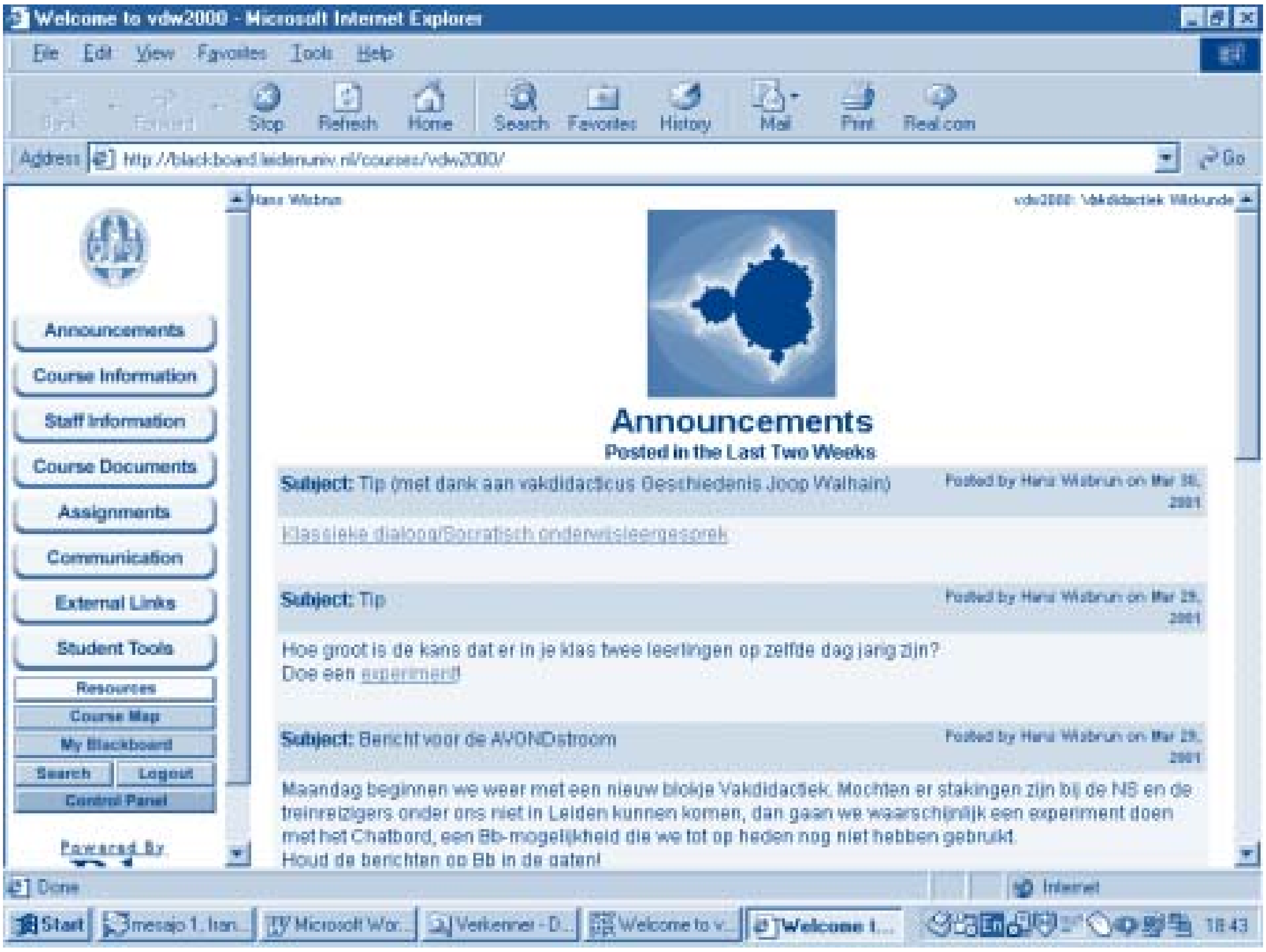


Berichten, de naam zegt het eigenlijk al: vastleggen huiswerk, wijzen op nieuwe sites, vacatures. Daarnaast maak ik soms wat culturele uitstapjes, het hoeft niet altijd harde wiskunde te zijn, als het maar op een of andere manier met wiskunde te maken heeft. Daarbij ga ik niet systematisch te werk: ik hoor eens wat, ik zie eens wat, op internet of in de krant en als het me bevalt dan plaats ik het bericht. Ik probeer via de Announcements ook een beetje een clubgevoel te creëren.



Course Information geeft een overzicht over de cursus in zijn geheel. Daar plaats ik bijvoorbeeld de Studietaak vakdidactiek wiskunde, met daarin zaken als doelstellingen, de plaats van het vak binnen het totale programma, de leeractiviteiten, de wijze van beoordeling, het rooster, enzovoort. Verder staan er onder Course Information handige zaken als routekaartjes. Alle bestanden kunnen online bekeken worden, afgedrukt, en 'voor de heb' naar de eigen computer gehaald.

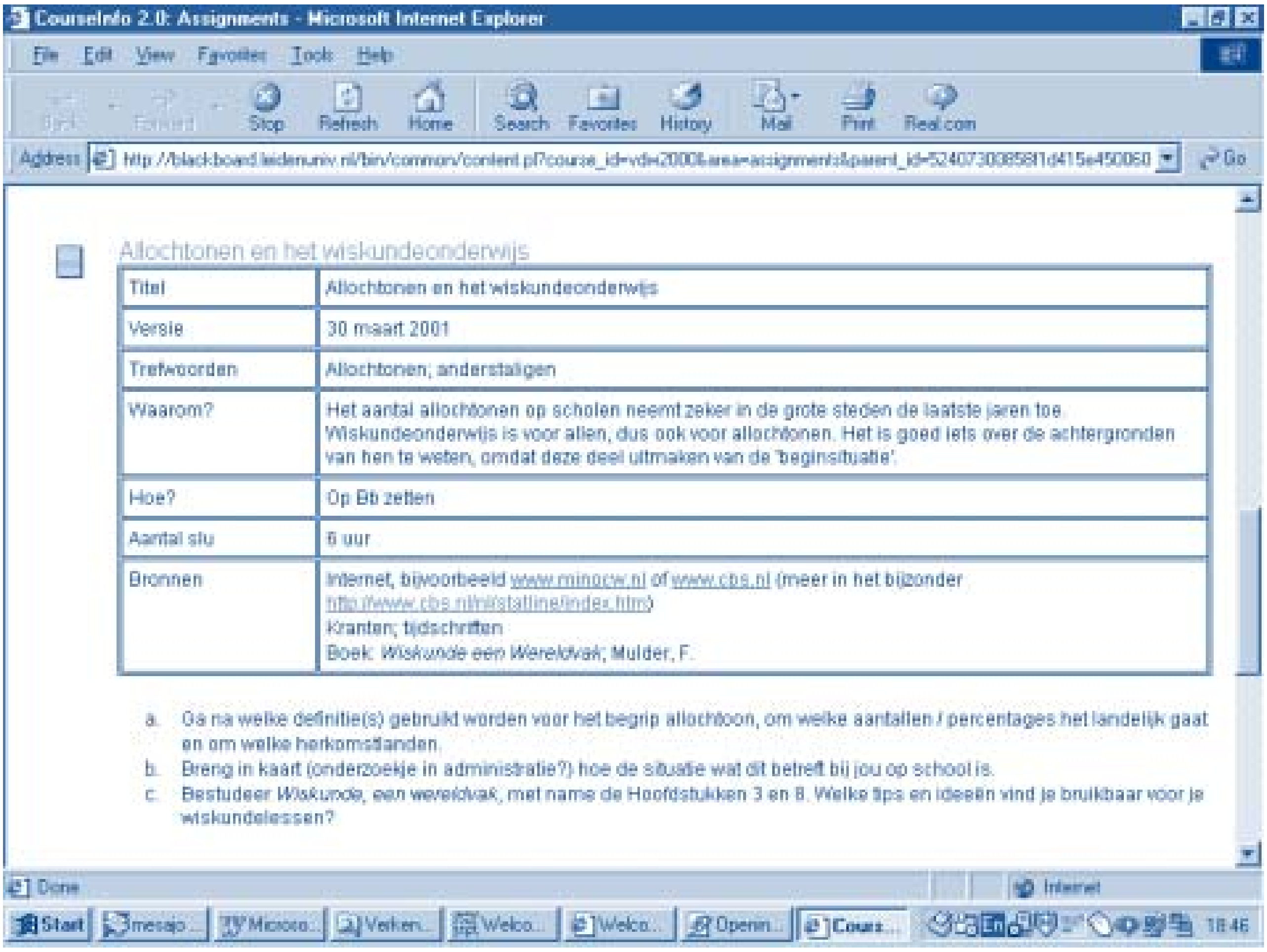
Onder Course Documents staan stukken die een meer lokale betekenis hebben. Het zijn bijvoorbeeld transparanten die ik bij een opdracht gemaakt heb of handouts bij een bepaalde bijeenkomst. De meeste bestanden die ik zelf maak (werkbladen, instructies, ...) horen echter erg nauw bij een bepaalde opdracht en die zitten dan ook niet hier, maar bij de 'Assignments'. Je zou onder Course Documents bijvoorbeeld ook wiskundesoftware (freeware, e.d.) kunnen plaatsen, maar dat deed ik tot nu toe niet. Wel staat er ook materiaal van cursisten op. Ik laat iedereen tijdens vakdidactiek wiskunde een zogenoemde zoekopdracht uitvoeren om alle informatie over een bepaald thema (praktische opdrachten, grafische rekenmachine, wiskundesoftware, ...) eens netjes op een rijtje te zetten. Dat rijtje presenteert de cursist meestal mondeling voor de andere cursisten. Bijproducten van deze activiteit zijn vaak ook documenten. Hebben die een bijzondere kwaliteit, dan krijgen ze een ereplaats onder de knop Course Documents en komen zo ook voor anderen beschikbaar. Die anderen kunnen in een andere stroom zitten of het kunnen cursisten zijn van komende jaren.



1

Vakdidactiek wiskunde is opdrachtgestuurd onderwijs. Ik put uit een collectie van een kleine vijftig opdrachten, die onder de knop Assignments staan. De meeste hiervan zijn verplicht, maar er zijn ook keuzes mogelijk. Die verzameling breidt zich steeds uit en met Blackboard is het heel makkelijk om een nieuwe opdracht, die bijvoorbeeld inspeelt op de actualiteit, erbij te zetten. Ook de redactie van bestaande opdrachten kan snel veranderd worden. Voorheen stonden die opdrachten op papier en werden één keer per jaar uitgedeeld, bij de start van het nieuwe cursus-jaar. Nu staat er altijd een actuele versie op Blackboard en daar kan ik mijn cursisten naar verwijzen. Geen misverstand is meer mogelijk. Een tweede voordeel is dat ook bijbehorende stukken, als werkbladen en nadere instructies, bij de opdrachten geplaatst kunnen worden. Ook deze zijn niet alleen te lezen, maar ook af te drukken of te downloaden. Een derde voordeel is dat je links kunt maken naar plaatsen op het internet die de cursisten kunnen gebruiken bij het maken van de opdrachten. Een persoonlijke favoriet van mij is de link bij de opdracht ‘Allochtonen en het wiskundeonderwijs’ (zie figuur 2), in het mapje Beginsituatie. Daarmee zoef je naar het programma Statline van het CBS, waar je allerlei gegevens kunt krijgen over allochtonen in Nederland. Die kun je vervolgens weer als databank-bestand naar je computer halen en daar kunnen deze gegevens desgewenst nog omgezet worden in tabellen of grafieken. Of je surft naar de onvolprezen Cabri-webwerkbladen van Dick Klingens, of naar de Ti-programmaatjes van Henk Pfaltzgraff, of naar de eindtermen bij de NVvW, of ... . De mogelijkheden zijn groot, vooral omdat de wiskundegemeenschap tegenwoordig goed op internet vertegenwoordigd is.

Ik heb ervoor gekozen om de opdrachten per thema te groeperen. Daarvoor maak ik dankbaar gebruik van de indeling van het DA-model (Didactische Analyse, overbekend bij wiskundeleraren boven de 40). Mijn collega’s op het ICLON kozen in het begin voor een andere indeling: per bijeenkomst. Dat bleek een grote handicap: er zijn hier verschillende onderwijsstromen, zoals dag- en avond-, septemberstarters en februari-starters, en die hebben niet dezelfde volgorde in het programma. Ook binnen een stroom liggen de keuze en volgorde van de opdrachten niet van tevoren vast, die pas je juist zoveel mogelijk aan aan de cursisten die je op dat moment voor je hebt zitten. Het bleek veel flexibeler om een indeling per thema te maken, een soort pool waaruit per bijeenkomst een of meer opdrachten gehaald kunnen worden. Zo kan je werk ook de zomervakantie overleven: de site kan hergebruikt worden voor nieuwe groepen.



2

Ook is er een knop met External Links, waarop ik een beperkt aantal doorverbindingen heb gemaakt naar internetsites die voor een wiskundeleraar eigenlijk altijd wel nuttig zijn om binnen bereik te hebben, zoals de site van de NVvW of een recent door een scholier gemaakte overzichtspagina voor de grafische rekenmachine.



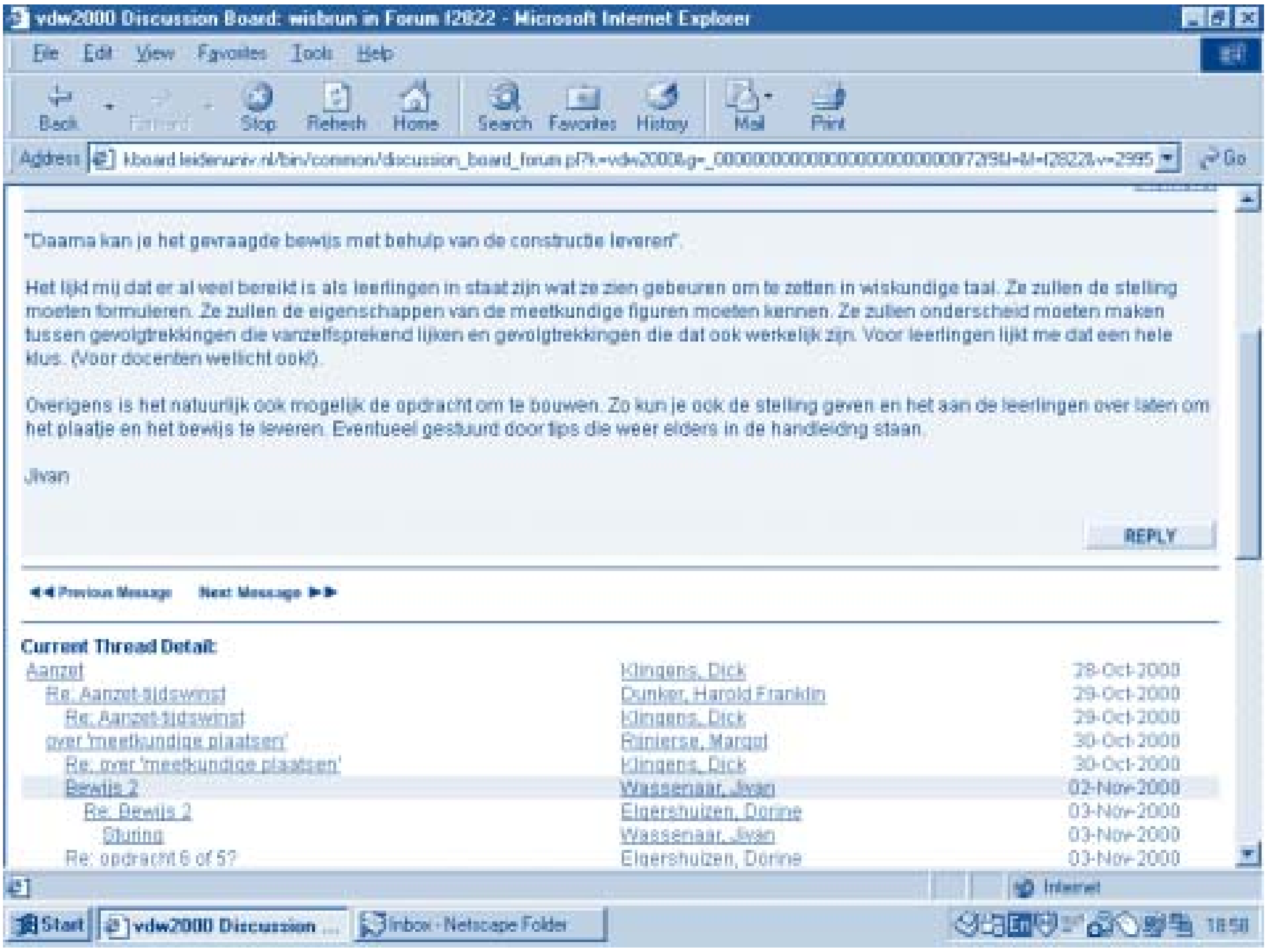
Misschien wel de belangrijkste knop: hier gebeurt het, met name in de zogenoemde Group Pages. De naam is wat misleidend. Denk in ieder geval niet aan een vaste groep, zoals een klas dat is. Ik deel de groepen in rond de opdracht waaraan op dat moment gewerkt wordt. Zo'n groep heeft daarom meestal een zeer beperkte levensduur: is de opdracht klaar dan wordt de groep opgeheven. Op naar de volgende opdracht! Dat opheffen betekent overigens niet dat het werk vernietigd wordt. Ik zet alleen het bij de groep behorende mapje, met al het werk erin, buiten beeld. Als ik wil tover ik het zo weer tevoorschijn. Per opdracht kan ik de groep samenstellen zoals ik wil. Soms zet ik dag- en avondstudenten, die elkaar nooit zien, bij elkaar, bijvoorbeeld om ervaringen op school met elkaar uit te wisselen. Soms schrijf ik ook 'gastdocenten' van buiten in om een handje te komen helpen. En soms maak ik, op verzoek, een groep voor mensen die geen vakdidactiek meer volgen, maar bijvoorbeeld nog wel een onderzoek met vakdidactisch karakter moeten doen. Ik zie dat als serviceverlening aan deze oud-cursisten en houd ze er zo toch een beetje bij.



Wat kun je doen in een Group Page? E-mailen naar elkaar zonder adressen te hoeven intypen. Chatten, maar dat heb ik nog maar een keer ingezet, toen de treinmachinisten staakten. Bestanden up- en downloaden via de File Exchange, ook dat kan. En discussiëren, via het Discussion Board (zie figuur 3).



Vaak maakt een opdracht uit vakdidactiek wiskunde gebruik van meer dan een component van een Group Page. Cursisten moeten bijvoorbeeld lesplannen met elkaar uitwisselen via de File Exchange en vervolgens geven ze via het Discussion Board commentaar op elkaars plannen. Of een groep werkt gezamenlijk aan een stuk: eentje schrijft een eerste versie en zet die op Blackboard. Daar wordt vervolgens via het Discussion Board door de anderen op gereageerd en het eindproduct wordt uiteindelijk weer in de File Exchange gezet.



3

Zoals gezegd schakel ik soms ook buitenstaanders in, bijvoorbeeld om mee te discussiëren over een onderwerp waar zij meer van af weten dan ik. Hoeveel moeite zou het kosten om zo'n gastdocent op een bijeenkomst te krijgen! Tot op heden reageerden alle mensen die ik voor deze rol benaderde positief: de inzet is beperkt - je een paar keer in de discussie storten - en je hoeft er niet op uit. Zo maak ik mijn klaslokaal, voor zover daar nog sprake van is, zo groot als de wereld.

Overige knoppen

Er zijn nog meer mogelijkheden. Zo kunnen cursisten een zeer bescheiden eigen homepage bouwen, Blackboard-instructies raadplegen en hun persoonlijke gegevens wijzigen. Een aantal andere opties heb ik uitgezet omdat die in de praktijk niet handig bleken te werken. Maar op Blackboard is het bijvoorbeeld ook mogelijk als cursist je behaalde cijfers in te zien of je rooster te bekijken.

Ik draai de knoppen nu even om. In een volgend nummer van Euclides kom ik nog terug op een knop die voor mijn cursisten onzichtbaar is, maar die voor mij van veel betekenis is: het Control Panel. Ik geef u dan ook een schets van mijn cursisten en van hun en mijn ervaringen met Blackboard. Tot slot kom ik dan toe aan de hamvraag: is een elektronische leeromgeving



misschien ook iets voor het Voortgezet Onderwijs? Maar nu is het tijd voor het menú del dia. Zal ik eerst nog eventjes een ommetje maken langs die kennelijk aan Pi gewijde kathedraal?

Noot

[1] Deel 2 van dit artikel zal verschijnen in Euclides 76-8, juni 2001.

Over de auteur

Hans Wisbrun is vakdidacticus wiskunde aan het ICLON, Universiteit Leiden.

De bedreigde status van de biologie op onze scholen heeft in het afgelopen jaar de diverse verenigingen die de belangen van het onderwijs in de exacte vakken behartigen, tijdelijk samengebracht. Permanente samenwerking tussen alle zusterverenigingen zal in de toekomst een steeds dringender eis worden om in deze toekomst de belangen der exacte vakken veilig te stellen.

De Wet op het Voortgezet Onderwijs zal het straks nodig maken dat allerlei uitvoeringsmaatregelen worden getroffen waardoor het karakter van de onderscheiden schooltypen die deze wet kent zal komen vast te staan. Hier nu ligt voor ons en de zusterverenigingen een belangrijke taak. Wij zullen namelijk niets mogen nalaten wat zal kunnen dienen om de totstandkoming te bevorderen van een schooltype, waar het onderwijs in de exacte vakken sterker zal domineren dan thans op hbs-B en gymnasium-B het geval is.

Ik heb al vaker naar voren gebracht dat in de eerste helft van de 20e eeuw er een tendens valt te constateren tot vermindering van het gewicht dat i.h.b. aan de wiskunde wordt toegekend. Er is een tijd geweest dat Nederland t.o.v. de exacte vakken de faam genoot zich gunstig van andere landen te onderscheiden. De voorsprong van weleer is echter verloren gegaan, zoals men door kennis te nemen van schoolprogramma's in andere landen zal ontdekken.

In een tijd als deze waarin de opbloei van de exacte vakken een ongekende vlucht neemt, een tijd, waarin gebruik en misbruik van technische toepassingen voor het welzijn van de maatschappij van niet gemakkelijk te overschatten betekenis worden, dient het onderwijs in de wiskunde en in de natuurwetenschappen de speciale aandacht van de autoriteiten te hebben.

Gedeelte van de jaarrede van de voorzitter van Wimecos, dr. Joh. H. Wansink, in Euclides 36 (1960-1961)

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Van de bestuurstafel

[Marian Kollenveld]

In Euclides 76-6 (p. 234) kondigde ik een voorbeeldbrief aan voor uw directie. Wel, hieronder staat die brief.

Betreft:
contacttijd tweede fase
Opmerking vooraf: contacttijd is hier de totale tijd dat een docent ingeroosterd beschikbaar is voor de leerling.

Geachte directie,

Regelmatig bereiken ons signalen dat docenten grote problemen hebben om het programma te behandelen in de tijd die hun door de schoolleiding is toegewezen.

Onderwijs in de wiskunde is uitstekend geschikt om leerlingen belangrijke vaardigheden te leren. Onderzoeken, probleemoplossen, analyseren, abstraheren, modelleren, redeneren en reflecteren komen op natuurlijke wijze binnen het programma aan bod. Uit meerdere onderzoeken is inmiddels gebleken dat daarbij een actieve docentinbreng, met interactie in de klas, de prestaties zeer ten goede komt.

In de diverse profielen in de tweede fase is daarom voor wiskunde een behoorlijke studielast ingeruimd.

In de praktijk blijkt dat scholen bij de vertaling van studielast naar contacttijd alle vakken gelijk hebben behandeld. Dat lijkt eerlijk en logisch, maar vakken verschillen onderling en het is dus verstandiger om wel met die verschillen rekening te houden. Bij een vak met veel eigen lees- en doewerk ziet de leerling de docent nu even vaak als bij een vak waarbij in korte tijd soms grote sprongen in abstractie moeten worden gemaakt, zoals bij wiskunde, met alle problemen van dien.

De ontwikkelingen binnen het onderwijs in de wiskunde van de laatste jaren hebben al geleid tot een werkwijze waarbij de leerlingen zoveel mogelijk zelf doen. In die zin is de tweede fase geen breekpunt, maar een doorlopende ontwikkeling. Aangezien de programma´s, met uitzondering van vwo B12, niet zoveel verschillen van de oude, is het verstandig de contacttijd in omvang ‘ouderwets’ te houden.

Scholen verschillen sterk in de toedeling van de contacttijd. Een royale school besteedt ruim anderhalf keer zoveel contacttijd aan wiskunde als een zuinige. Het behoeft geen betoog dat leerlingen van de eerstgenoemde school aanmerkelijk beter voorbereid op het examen komen dan van de tweede en dat heeft uiteraard gevolgen voor het examenresultaat. Deze examens zullen immers een ‘ouderwets’ niveau hebben en houden.

Het lijkt ons redelijk dat de verhouding contacttijd-zelfwerkzaamheid 50-50 is. Dan staat tegenover elk uur met docent gemiddeld een uur zelfstandig werken door de leerling; dus soms meer, soms minder. Enig rekenwerk leerde ons echter dat op sommige scholen het percentage contacttijd gezakt is tot onder de 30%. Per contactuur moet de leerling dan wel 2 à $2\frac{1}{2}$uur gemiddeld(!) zelf werken. Het is weinigen gegeven die tijd ook effectief te besteden; velen kunnen na korte tijd al niet verder, waardoor de facto de leerling maar een fractie van de studielast effectief in het vak kan stoppen. Dit geeft gevoelens van frustratie en demotivatie, bij de leerlingen en bijgevolg ook bij de docenten.
De docent kan in de te krappe tijd zijn vak niet meer verantwoord geven, waardoor hij de leerlingen niet het onderwijs kan geven waarop zij recht hebben. Er is dan geen tijd voor reflectie, het bespreken van verschillende oplossingsmethoden, aandacht juist voor die vaardigheden die de meerwaarde van het wiskundeonderwijs ook voor andere vakken heeft. Het te lang louter zelfstandig doorwerken van de leerstof leidt tot vervlakking, veel half of onbegrepen zaken, weinig begrip voor samenhang of lange lijnen, geen onderscheid tussen hoofd- en bijzaken. Het is kortom slecht onderwijs en de leerlingen zijn er de dupe van.

Wat rekenvoorbeelden ter illustratie.
Uitgangspunten: 30 lesweken regulier en 25 lesweken in de examenklas; lessen van 45 resp. 50 minuten.

School A, vwo-B1: 3 uur in klas vier, 2 uur in klas vijf en 3 uur in klas zes. Dat geeft tezamen $3 \times 30 + 2 \times 30 + 3 \times 25 =$ 225 lessen van 45/50 minuten, dus 169/188 uur contacttijd. De studielast is 600 uur, het percentage contacttijd is dan met 28 resp. 31% onverantwoord laag.

School B, vwo A12: in alle leerjaren 4 wekelijkse lessen. Dat geeft tezamen $4 \times 30 + 4 \times 30 + 4 \times 25 =$ 340 lessen van 45/50 minuten, dus 255/283 uur contacttijd. De studielast is ook 600 uur, het percentage contacttijd is dan met 43 resp. 47% redelijk te noemen.

U kunt uiteraard zelf eenvoudig doorrekenen hoe de situatie op uw school is.

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) staat

WereldwiskundeFonds: op zoek naar nieuwe leden

[Hans Wisbrun]

Het Wereldwiskunde-Fonds (WwF) is een werkgroep binnen de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het doel van deze werkgroep is:

- ondersteuning te bieden aan het wiskundeonderwijs in derdewereldlanden door middel van financiële bijdragen aan nader te bepalen projecten;
- wiskundedocenten *hier* te laten zien dat er *daar* ook collega's zijn die zich met soortgelijke, maar ook met heel andere vragen en problemen bezig houden dan zij zelf.

Tot op heden werden projecten ondersteund in Zambia, Zimbabwe, Mozambique, Bhutan, op de Malediven, in Ghana (zie Euclides 76-2, p.75-77), Soedan en Kenia.

Wij zijn weer op zoek naar **nieuwe leden**. Dat zouden wiskundedocenten moeten zijn met affiniteit met of (werk)ervaring in de Derde Wereld. Een van hen zou ook enige ervaring met financiën moeten hebben, in verband met het vertrek van onze penningmeester.

De investering in tijd is relatief gering: wij hebben ongeveer vier gezamenlijke bijeenkomsten per jaar, meestal in de namiddag. Verder wordt van leden verwacht dat zij contact houden met geworven projecten en meewerken aan artikelen.

Reiskosten worden door de NVvW vergoed.

Geïnteresseerden kunnen contact opnemen met de secretaris van het WwF, Gerben van Lent (e-mail: *jonglent@worldonline.nl*; tel.: 010 - 4524556) of met de voorzitter, Hans Wisbrun (e-mail: *wisbrun@wxs.nl*).

voor kwalitatief goed wiskundeonderwijs en we willen onze leden graag steunen in hun streven om in de gelegenheid gesteld te worden die goede kwaliteit ook te leveren.

We roepen u dan ook dringend op om de hoeveelheid contacttijd in overeenstemming te brengen met de eisen van het vak. Ter ondersteuning kan wellicht dienen dat de inspectie desgevraagd onze zorg zegt te onderschrijven, en dat het departement van OC&W ook zeer verbaasd was over het geringe percentage dat soms aan contacttijd besteed werd.

U staat niet alleen, kwaliteit van onderwijs is een zorg van ons allen. Goed onderwijs vraagt om voldoende lestijd. Geef uw leerlingen en uw docenten die tijd!

Hoogachtend,
namens het bestuur van de NVvW,
M. Kollenveld, voorzitter

'Download'

Als u een e-mail of briefje stuurt naar de secretaris (zie Colofon), dan krijgt u een aan uw directie gerichte brief op het briefpapier van de vereniging.

Zelf schrijven kan natuurlijk ook. U kunt de brief ophalen via de downloadpagina van onze website: *http://www.nvvw.nl/download/dirbrief.zip*

Wij Montessorianen in vrijheid opgevoed,
leren eendrachtig tezamen wat de mens thans weten moet.
Maar meer nog dan de wetenschap, alom zo zeer geëerd,
wordt in ons de zelfstandigheid en levensvreugd vermeerd!

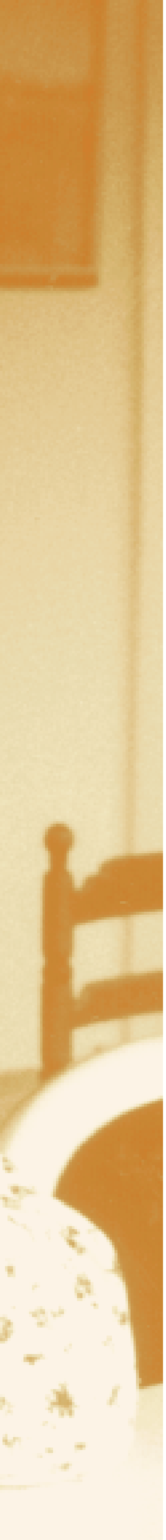
Dit zijn de eerste regels van een schoollied, 53 jaar door Agneta geleden geleerd en nu bij dit interview door haar gezongen.

Agneta Aukema

[Freek Mahieu]



Interview





Tijdens de laatste jaarvergadering heeft Agneta Aukema afscheid genomen van het bestuur van onze vereniging.
Wie met Agneta te maken heeft gehad in het kader van haar bestuursactiviteiten, wordt vanzelf nieuwsgierig naar haar achtergronden.
Bijvoorbeeld: wat beweegt iemand om veertien jaar lang soms lastige klussen te doen voor een wiskunde-vereniging? Om vrijwilligerswerk te doen in de vorm van bijlessen aan huis?
Het is niet de eerste keer dat ik de woning van Agneta binnenkom. De PR-commissie van de vereniging vergaderde graag bij haar thuis. Op haar werktafel liggen de laatste toetsen die ze nog moet corrigeren. Volgende week neemt ze namelijk afscheid van haar school wegens het bereiken van de pensioenleeftijd.

De telefoon gaat. Ik herken haar welkomsgroet: ‘Met agnetaaukema!’, vinnig, verwachtingsvol, maar vooral hartelijk. Iemand vraagt of Agneta vanmiddag meedoet aan de roeitraining. In verband met het interview zegt Agneta die training af, hoewel ze die bijna nooit overslaat. Ik voel me een beetje vereerd, maar ook schuldig, want Agneta roeit in een team.
We praten wat en wisselen nieuws uit. Allereerst gaan onze gedachten naar Wolfgang Reuter die enkele weken geleden plotseling overleden is.

‘Wolfgang en ik waren sinds 1977 collega’s aan de Scholengemeenschap Lelystad (SGL). Hij was getrouwd met een Nederlandse en wilde graag het strak vastgelegde Duitse onderwijs verwisselen voor een baan in Nederland, waar hij zijn creativiteit beter hoopte te kunnen ontplooien. En creatief is hij altijd geweest, fantastisch! Ik stond er versteld van hoe vlot en kundig hij het Nederlands beheerste. De eerste drie weken van het schooljaar kon hij nog niet in functie zijn, zodat ik in een gloednieuw deel van de school, waar nog een wand tussen twee lokalen ontbrak, probeerde zijn en mijn klas tegelijk draaiende te houden; nu zou me dat veel te zwaar vallen!
De collega’s noemden ons “het wiskundepaar” omdat we zo perfect konden samenwerken; ik denk dan bijvoorbeeld aan ons werk als proefschool voor de HEWET.’

Dat je zo graag iemand vooruithelpt, is dat een reden voor je geweest om voor een onderwijsloopbaan te kiezen?
‘Misschien door de scholen die mijn ouders voor mij kozen. Ik was tweeënhalf jaar in 1938, toen ik naar de Montessorischool in Voorburg ging. Tot mijn twaalfde heb ik nooit klassikaal les gekregen en tot mijn achttiende nauwelijks. “Help de kinderen het zelf te doen”, was de lijfspreuk van Maria Montessori. We werkten vaak samen in kleine groepjes, deden veel met concreet materiaal, hielpen elkaar. Dat was toen iets bijzonders; nu is het gemeengoed geworden.
In 1948 ging ik naar het Lyceum voor Montessori-leerlingen in Rotterdam. Daar kreeg ik onder andere wiskundeles van Piet van Albada. De wiskundeleraren maakten zelf hun materiaal. Het begon met een voor die tijd uitzonderlijke intuïtieve inleiding in de meetkunde. Ik herinner me een serie kaarten over perspectief: een rij telegraafpalen langs de weg (die stonden er toen nog), waar je één ontbrekende tussen moest zetten; je reinste kijkmeetkunde van nu! Verder met kartonnen tegeltjes van allerlei vormen een aaneengesloten keukenvloer leggen en die dan nauwkeurig op millimeterpapier natekenen en inkleuren. Pythagoraslegkaarten, zodat je de stelling met de drie vierkanten vóór je zag en nooit meer vergat. De modernisering van het wiskundeonderwijs die in de zeventiger jaren op gang kwam, is voor mij dus geen schok geweest. Ik gebruik nog steeds veel concreet materiaal met mijn bijlesleerlingen. Kijk maar!’

Agneta werpt een stel door het gebruik getekende doosjes en legpuzzeltjes van hout en papier op tafel en haalt terloops drie piramides uit een balkje: ‘Zet ze er maar weer eens in!’
‘Ik wilde altijd graag vriendinnen helpen en vroeg me toen al af hoe je dat het beste kon doen. En als de uitleg dan gelukt was, gaf me dat echt “een kick”’.

Hoe ben je ertoe gekomen om wiskunde te gaan studeren? Was er zoiets als een ‘beslissende factor’: een leraar, een wiskundige vrouw, de schoonheid van een bewijs?
‘Nee, ik denk dat het kwam door het plezier dat ik had om iets te analyseren, precies uit te zoeken met mijn aangeboren nauwkeurigheid. Ik durf nooit direct te zeggen bij een ruimtelijk probleem: dáár ongeveer moet het snijpunt liggen. Misschien heb ik daarvoor te weinig ruimtelijk inzicht; ik zoek het liever eerst precies uit. En dat is een voordeel bij het lesgeven: ik kan me heel goed verplaatsen in leerlingen die een ruimteprobleem niet vanzelf doorzien en help hen dan op weg met vaste stappen.

Toen ik geslaagd was voor gym-bèta en *men* zei dat je daarmee alles kon studeren (decanen met gefundeerde adviezen bestonden nog niet), was dan ook de grote vraag: durf ik wiskunde aan?

Het werd wis-, natuur- en sterrenkunde aan de Universiteit van Utrecht, waar ik brave ijver ontplooide temidden van vaak briljante mannen. Bij sommige colleges was ik de enige vrouw.
Al gauw merkte ik dat ik het alléén theoretiseren niet volhield, dat ik er andere dingen naast moest doen om te overleven. Ik wilde leraar worden, geen abstract wiskundige. Ik deed jeugdwerk, leidde kinderkampen, besteedde veel tijd aan allerlei studentenbesturen. Daardoor schoot het studeren niet op, maar legde ik wel de basis voor een goed leraarschap.
Na mijn kandidaats, o.a. bij de hoogleraren Freudenthal en Van der Blij, kreeg ik mijn eerste baan (dankzij de pre een padvinderskamp van tien weken te hebben geleid in de USA), op de Werkplaats Kindergemeenschap van Kees Boeke in Bilthoven.
Daarnaast probeerde ik in wiskunde af te studeren. Je kon toen helaas geen doctoraal doen met een didactische scriptie en een theoretisch wiskundige scriptie trok mij totaal niet. Gelukkig kwam toen de regeling dat wiskunde-doctoraalexamens recht gaven op een MO-B-diploma wiskunde, met in mijn geval bevoegdheid voor sterrenkunde.'

Was het gemakkelijk in de zestiger jaren om als gehuwde vrouw en later als moeder van een gezin je beroep als lerares uit te oefenen?

'Na een volle baan aan de Scholengemeenschap Amersfoortse Berg (vroeger Montessorilyceum!), kreeg ik, en inmiddels getrouwd in Kampen wonend, zoals elke gehuwde vrouw slechts een tijdelijke aanstelling aan het gemeentelijk lyceum in Kampen die prompt afliep toen ik in verwachting raakte. De leerlingen van deze school waren gewend klassikaal gedrild te worden, maar ik kon het niet laten van mijn Montessoriprincipes uit te gaan. Ik mocht van de rector wel de tafels in groepjes zetten en mijn leerlingen laten samenwerken, maar bleef wel de enige met deze "gekke fratsen", zeker met het huiswerk voor de eerste les na een repetitie: het inleveren van een werkschema voor de verwerking van de stof voor de volgende repetitie op basis van eigen taxatie.
Tussen en na de geboorten van de kinderen mocht je wel weer tijdelijk invallen als een school je nodig had en dat deed ik dan ook; mijn man vond dat gelukkig prima.
Vanaf 1973, intussen verhuisd naar Lelystad, kreeg ik weer een vaste baan aan de SGL. Het vorm geven aan de "middenschool", met heterogene eerste, tweede en derde klassen was inspirerend, inspannend en voor mij soms frustrerend: men wilde persé allerlei *nieuwe* dingen invoeren, zoals de geschreven rapporten zonder duidelijke niveauaanduiding, die ik in 1948 als schoolkind al meegemaakt had en die later vanwege teveel bezwaren weer afgeschaft was. Mijn smeekbede: "Ga nu eens eerst informeren waarom het indertijd weer werd afgeschaft als je mij niet gelooft!", vond geen gehoor. Nu zijn veel van deze beginidealen inderdaad afgeschaft, ook die rapportage.
Maar de SGL was en is nog steeds een fijne school met een prima sfeer voor leerlingen en leraren: "Onderzoekt alle dingen en behoudt het goede", wordt hier in praktijk gebracht.
Helaas kon ik (een hormonenkwestie) in 1986 niet meer tegen het lawaai en de drukte in de inmiddels heel groot geworden SGL; maar ik kon gelukkig wel twee avonden per week blijven lesgeven aan de School voor Volwassenen. Deze is inmiddels opgenomen in ROC Flevoland, waar ik nu volgens de CAO moet stoppen.

Werkt het alsmaar bezig zijn met wiskunde door in je dagelijks handelen? Is je tuin wiskundig aangelegd? Kregen je kinderen wiskundig speelgoed? Wat betekende 'Vrouwen en Wiskunde' voor je eigen leven?

'In onze tuin vind je meer de invloed van mijn man; hij is landbouwkundig ingenieur. En onze dochter kreeg technisch lego, maar ik geloof dat haar broertje er tenslotte meer mee speelde. Onze kinderen haalden overigens hogere cijfers voor hun wiskunde-eindexamen dan ik.
Ik heb vanaf de oprichtingsvergadering in 1982 deelgenomen aan *Vrouwen en Wiskunde*, maar ik voelde me daarom nog echt geen Dolle Mina. Wat was dat toen een verademing om te horen dat bijna alle aanwezige wiskundeleraressen dezelfde ervaringen hadden: de zware studietijd temidden van veel aldoor abstract denkende mannen, terwijl vaak het sociale aspect ontbrak; want áls de mannen het eens niet over



wiskunde hadden, ging het wel over een moeilijk schaakprobleem of iets dergelijks.
We gingen wiskundeboeken kritisch bekijken op het gebruik van de eeuwige jongensnamen en mannelijke bezigheden. Wat dat betreft heeft *Vrouwen en Wiskunde* veel invloed gehad: er kwamen huis-, tuin-, naai- en keukenproblemen in de leerboeken aan de orde, waar elk kind vroeg of laat mee te maken krijgt en de uitgevers wierven voortaan ook vrouwelijke medewerkers.
Het sloeg een beetje door toen Moderne Wiskunde op een gegeven moment consequent, het hele boek door, *zij* gebruikte en nooit meer *hij*. En steeds het meisje het goede antwoord laten geven en de jongen de fout laten maken, liep bij de leerlingen in de gaten. Nu is er een goed evenwicht, vind ik. Dat ook bij de brugklasmeisjes bij de *Nationale Doorsnede* (herfst 2000) wiskunde na lichamelijke opvoeding het favoriete vak bleek, durfden we in 1982 niet te dromen.'

Hoe ben je lid geworden van het bestuur van onze vereniging en wat vond je daarbij het interessantste werk?
'Als enige student was ik indertijd lid van een didactische groep: de Wiskunde Werkgroep van de WVO (Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Onderwijs en Opvoeding) en heb bijvoorbeeld goede herinneringen aan discussies met Pierre van Hiele.
De eerste keer dat ik een jaarvergadering van de NVvW bezocht, had ik de euvele moed om op te staan en te vragen waarom er geen jaarbalans was, zoals ik gewend was te moeten maken als penningmeester van de Utrechtse Vrouwelijke Studenten Vereniging. Joop van Dormolen, toen penningmeester, bleek aangenaam verrast dat iemand eens om nadere uitleg van de verenigingsfinanciën vroeg. Hij beloofde voortaan voor een balans te zorgen.
Met het volgen van o.a. de A-, B- en C-didactiek-cursussen leerde ik Joop nog beter kennen en hij was het die mij voor het bestuur vroeg. Aanvankelijk zei ik nee, omdat de kinderen nog zo klein waren en er, nog zonder trein en A6, veel reistijd vanuit Lelystad bij zou komen. Maar in 1986 werd ik door *Vrouwen en Wiskunde* gestimuleerd om de bestuursvacature te vullen, nuttig werk, zonder al te veel lawaai....
In de veertien jaar die volgden heb ik als bestuurslid veel verschillende dingen onder handen gehad. Ik voelde me soms een *vliegende keep* die de problemen aanpakt waar dat nodig is. Ik kon, doordat ik alleen 's avonds lesgaf, naast bijlessen die gemakkelijk verzet konden worden, ook naar bijeenkomsten overdag.
Geleidelijk aan wijdde ik me, mede door een scherpere taakverdeling binnen het bestuur, aan enkele steeds terugkerende klussen: het opzetten van de jaarlijkse regionale studiebijeenkomsten en het namens de vereniging commentaar leveren op de steeds weer veranderende examenprogramma's en leerplannen, het schrijven van brieven, ook aan het ministerie, en het voeren van overleg op allerlei plaatsen. Dit precieze, inhoudelijk belangrijke en redactioneel veeleisende werk waarmee de vereniging naar buiten trad, lag me goed, zoals ook het schrijven van de rubriek "Van de Bestuurstafel" in Euclides; alleen het maken van notulen vond ik vervelend werk'.

Vind je dat de vereniging aan het veranderen is?
'Binnen het bestuur kunnen we de laatste jaren veel effectiever vergaderen, omdat ieder per e-mail al direct tussen twee vergaderingen over nieuwe ontwikkelingen *bijgeschreven* wordt. De nieuwe structuur met werkgroepen en commissies is een verbetering, omdat het werk over meer mensen gespreid wordt, maar voortrekkers blijven noodzakelijk; en die zijn in deze drukke tijden vaak moeilijk te vinden. In dit verband is de uitbreiding van de gegevens van een lid in het ledenbestand met meer persoonlijke informatie, wensen en de bereidheid tot meewerken, een goede greep geweest.
We mogen best een beetje trots zijn op onze vereniging die het wat activiteiten betreft bijzonder goed doet vergeleken met andere vakinhoudelijke verenigingen'.

Moet de vereniging zich bekommeren om gepensioneerde wiskundeleraren?
'Nee hoor. Die moeten maar zelf in actie komen, hopelijk om de vereniging ergens mee te helpen, zeker nu de werkende leden het zo enorm druk hebben. Wie heeft er goede ideeën, kan hulp geven bij profielwerkstukken, et cetera? Zie de binnenkaft van deze Euclides en geef een seintje aan de secretaris, graag!'

Hoe zie je de toekomst van het wiskundeonderwijs in Nederland?
'Zelfstandigheid en dragen van eigen verantwoordelijkheid aanbrengen bij leerlingen valt niet mee, vooral als er in de onderbouw weinig aan gedaan is. Hier en daar zie je dat de nadrukkelijke aandacht voor het zelfstandig werken weer wat wordt teruggedraaid. Was het een te grote verandering ineens? Voor wiskunde zullen groepsgewijze activiteiten nodig blijven, waarbij in een klassegesprek-met-docent de problemen in de stof besproken kunnen worden. Zoals onze voorzitter zo mooi zegt: "Leonardo da Vinci was een genie, maar voor wiskunde had hij een leraar".
En mijn jonge opvolgers zullen zeker de ict-mogelijkheden steeds beter gaan gebruiken. Komt de symbolische rekenmachine op school of heeft straks elke bovenbouwleerling een laptopje? Ik wens het bestuur, met haar werkgroepen, wijsheid bij het nemen van beslissingen over adviezen voor nieuwe apparatuur en software. Dat economiedocenten de grafische rekenmachine verbieden omdat ze anders geen formules meer kunnen vragen..., hoe lang zal dat nog duren?
Ik hoop dat het HBO van de zomer wakker is als de 2e fase-leerlingen met de grafische rekenmachine in hun bagage binnenstromen ....'

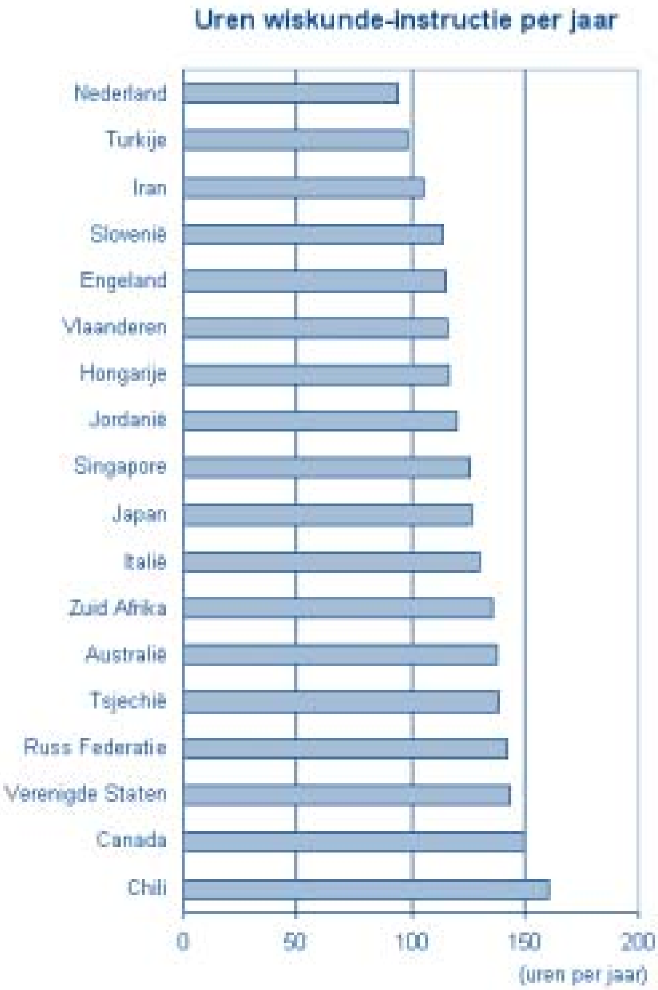
Als ik van Agneta's huis naar de auto loop kruist achter mij langs een jongen met een boekentas: Agneta's bijlesleerling van vanmiddag.

Wiskunde in de verdrukking

[Pauline Vos]

In het artikel Nederlandse leerlingen bij de internationale top (Euclides, 76-6, p. 226-232) schrijven we over het internationale TIMSS-onderzoek, waaruit onder andere blijkt dat er in Nederland relatief veel mannelijke wiskundeleraren zijn. Dat zou je kunnen samenvatten met de zin: wiskundeleraarschap in Nederland is een mannendomein. Of: Nederland is geen wiskunde-leraressen-land. De redactie van Euclides haalde een zin uit onze tekst uit het verband en plaatste deze als vette tussenkop om de lay-out te verfraaien. Wij schreven: ‘Nederland is een echt wiskunde-leraren-land. In bijvoorbeeld de Verenigde Staten en Vlaanderen staan in meerderheid leraressen voor de klas. In de landen van het voormalig Oostblok is het wiskundeleraarschap in de tweede klas een typische vrouwenbaan’. Hoewel wij de zin produceerden, willen we ons distantiëren van de geïsoleerde slogan ‘Nederland is een echt wiskundeleraren-land’.

Nederland is een echt kikkerland en een koeienland. Nederland is een voetballand en een vakantieland. Nederland is een waterland en een vergaderland. Maar is Nederland een echt wiskundeleraren-land? Wat zou dat betekenen? Zoiets als: in Nederland voelen wiskundeleraren zich thuis. Of: Nederland wordt door wiskundeleraren bestuurd. Op elke straathoek kom je een wiskundeleraar tegen. Zonder wiskundeleraren geen dijken. In iedere Nederlander schuilt een geboren wiskundeleraar! Nederland is een echt wiskunde-leraren-land!?



Zo is het dus niet. We hadden moeten schrijven: *Nederland is een land van vooral mannelijke wiskundeleraren.* Hieraan valt toe te voegen dat er momenteel steeds meer vrouwen het beroep van wiskundeleraar (m/v) kiezen. Onder de jonge aanwas van wiskundeleraren bevindt zich een groeiend aantal vrouwen. Daarmee krijgen we dan: *Nederland is tot op heden een land van voornamelijk mannelijke wiskundeleraren.*

Maar er is nog iets anders aan de hand. Wiskunde zit als schoolvak in de verdrukking. Er is een groeiend wiskundeleraren-tekort. Ook krijgt het vak wiskunde maatschappelijk gezien weinig ondersteuning. Het feitelijk draagvlak voor mooi en degelijk wiskundeonderwijs is smal. Dit blijkt bijvoorbeeld uit het aantal uren dat er aan dit vak wordt besteed.

Uit internationale vergelijkingen blijkt het gemiddeld aantal lesuren voor wiskunde in de tweede klas van het voortgezet onderwijs in Nederland bijzonder laag te liggen. We komen voor een tweede klas uit op een gemiddelde van 94 uur per jaar, wat neerkomt op drie of vier lesuren van 50 minuten per week. Daarmee valt Nederland internationaal gezien op. Het totaal van 94 uren wiskunde voor een gemiddelde tweede klas is berekend uit het gemiddeld aantal klokuren per week, vermenigvuldigd met het gemiddeld aantal gerealiseerde lesweken per jaar (waarin lesuitval meegerekend is). In de figuur staan de cijfers voor een aantal landen die aan het internationale TIMSS-onderzoek deelnamen.

Nergens is de tijd voor wiskundelessen zo laag als in Nederland. In onze buurlanden Vlaanderen en Engeland wordt gemiddeld per jaar 20 uur méér aan wiskunde besteed. Zij hebben daarmee in één schooljaar 24 lesuren van 50 minuten extra. In de Verenigde Staten hebben ze met hun 144 uren per jaar dus ongeveer elke lesdag van de week een wiskundeles van 50 minuten [1].

Nederland een echt wiskunde-leraren-land? Het lijkt er in Nederland eerder op dat wiskunde steeds meer een marginale plaats inneemt in de lessentabel en dat wiskundeleraren (m/v) binnenkort een zeldzame soort zijn.

Noot

[1] Ina V.S. Mullis, Michael O. Martin, e.a., TIMSS 1999 International Mathematics Report, Boston (2000)

Over de auteur

Pauline Vos (e-mail: vosp@edte.utwente.nl) is verbonden aan de Universiteit Twente. Zij is medewerkster aan het project TIMSS Nederland.

Noot van de redactie

Het artikel Nederlandse leerlingen bij de internationale top (Euclides, 76-6, p. 226-232) waarop het bovenstaande een mooie aanvulling is, is door toedoen van de redactie minder leesbaar geworden dan eigenlijk gewenst is.

Vooral door de manier waarop de figuren en de noten buiten de tekst zijn geplaatst, moet de lezer te vaak in de tekst heen-en terugbladeren.

Verontschuldigingen hiervoor aan de auteurs en de lezers gaan dan ook hierbij.

Boekbespreking

Vectoren en Matrices, een inleiding in de lineaire algebra

[Hans Sterk]

Jan van de Craats

Epsilon Uitgaven 45, Utrecht (2000)

xvi + 222 p.; prijs f 37,50;

ISBN 90-5041-056-1

In de inmiddels omvangrijke serie Epsilon Uitgaven is nu ook een deel over lineaire algebra verschenen, bedoeld voor studenten aan een universiteit of HBO-instelling en leraren. Leerlingen uit 6-vwo zouden er ook mee uit de voeten moeten kunnen volgens de achterflap. Het is gebaseerd op door de auteur verzorgd onderwijs gedurende meerdere jaren.

Lineaire algebra is een basisdiscipline uit de wiskunde waar je in vele (exacte) beroepen mee te maken krijgt. De auteur heeft er voor gekozen zich te richten op het wiskundig apparaat zelf, met voorbeelden dicht bij de wiskunde die het hanteren van de wiskundige technieken illustreren. Aldus beoogt de auteur een solide basis te leggen van waaruit lezers een eigen vervolgweg kunnen inslaan. Het uitvoerige voorwoord verantwoordt ook andere keuzen, bijvoorbeeld ten aanzien van bewijzen: bewijzen die het inzicht helpen vergroten zonder al te veel technische obstakels op te werpen zijn in de hoofdtekst opgenomen, sommige andere bewijzen zijn in een appendix te vinden. Ten aanzien van computeralgebra: de lezer wordt aangeraden eens met een relevant pakket te experimenteren, maar het boek besteedt er niet expliciet aandacht aan. Een epiloog verhaalt in kort bestek over zaken die niet aan de orde konden komen: vectorruimten over andere lichamen, numerieke aspecten. De auteur hanteert een ‘verhalende’ stijl: concepten worden beargumenteerd ingevoerd en met elkaar in verband gebracht; op vele bladzijden neemt ‘gewone’ tekst een belangrijke plaats in. Maar aan de wiskundige strengheid wordt geen concessie gedaan. Ter oefening zijn vele opgaven (met antwoorden) opgenomen.

Het boek start met vectorrekening in het vlak en in de ruimte, met tevens daarin het verband met de vectorruimten $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$. In dit hoofdstuk komen parametervoorstellingen en vergelijkingen van lijnen en vlakken voor, hoeken en afstanden tussen vectoren, en het inproduct. Hoofdstuk 2 introduceert het abstracte begrip vectorruimte: axioma’s, lineaire deelruimte, basis, dimensie en coördinaten ten opzichte van een basis.
Hoofdstukken 3, 4 en 5 zijn gewijd aan het in vectorruimten onontbeerlijke rekenwerk met stelsels lineaire vergelijkingen en matrices: eerst het oplossen via Gauss-eliminatie, dan de taal der matrices alsmede determinanten.

Het volgende deel van het boek bestudeert verbanden tussen vectorruimten middels het begrip lineaire afbeelding. Hier vallen bijvoorbeeld loodrechte projecties op een vlak door de oorsprong onder, maar ook minder aanschouwelijke afbeeldingen. De rol van matrices in deze context komt aan de orde, het verdere standaard begrippenapparaat rond lineaire afbeeldingen, en het deel eindigt met eigenwaarden en eigenvectoren, onontbeerlijk om vat te krijgen op lineaire afbeeldingen.

Daarna worden vectorruimten met een iets rijkere structuur bestudeerd: inproductruimten. Dit is het cruciale begrip om op een soepele manier over afstanden en hoeken in een abstracte vectorruimte te kunnen spreken. Lineaire afbeeldingen die in de context van inproducten een belangrijke rol spelen, zijn de zogenaamde orthogonale en symmetrische afbeeldingen. Orthogonale afbeeldingen in dimensies 2 en 3 zijn er ruwweg in twee soorten: draaiingen en (draai)spiegelingen. Symmetrische afbeeldingen zijn de abstracte tegenhanger van symmetrische matrices en spelen een rol bij kwadratische vormen, krommen en oppervlakken. Het laatste hoofdstuk is aan deze kwadratische krommen en oppervlakken gewijd.

De auteur is er zeker in geslaagd een fraaie balans tussen concrete en abstracte zaken te vinden en heeft een bruikbare, degelijke tekst geschreven.
Nog even terug naar 6-vwo leerlingen uit de exacte richtingen: voor hen zijn bijvoorbeeld de hoofdstukken 1 (Vectorrekening), 3 (Stelsels lineaire vergelijkingen) en 4 (Matrices) zeker toegankelijk, soms misschien met enige begeleiding. Vanaf hoofdstuk 5 dient men bekend te zijn met de voorgaande hoofdstukken, en in het bijzonder de (abstracte) hobbel van het begrip vectorruimte (hoofdstuk 2) genomen te hebben. Dat vergt natuurlijk een enorme tijdsinvestering. Wiskunde blijft een bouwwerk!

Het Magisch Labyrint, de wereld bezien door wiskundige ogen

[J.C. Smit]

Ian Stewart

Vertaling: Marjolijn Stoltenkamp

Uitgeverij Nieuwezijds (1998)

245 p.; prijs f 39,50; ISBN 90 5712 036 4

Eind december 1997 verzorgde Ian Stewart de beroemde ‘Christmas Lectures’. Dit is een jaarlijks evenement (sinds 1826), bestaat uit drie voordrachten - shows is misschien een beter woord - over een bepaalde tak van wetenschap. In 1997 was dat voor de tweede keer wiskunde. De bedoeling is belangstelling te wekken voor de wetenschap bij de jeugd. Het boek is reeds vóór de uitzending geschreven en bevat veel meer stof dan in de voordrachten behandeld kon worden. Bij het lezen van het boek kan men zich goed voorstellen welke onderwerpen geschikt zijn voor de tv-show.

Aan de hand van concrete voorbeelden laat de schrijver zien hoe praktische problemen kunnen leiden tot algemene ideeën en theorieën en hoe die dan weer op hun beurt soms onverwachte toepassingen kunnen hebben. Het begint heel eenvoudig met getallenspelletjes, Fibonacci, patronen in bloemen. En het eindigt met fractale figuren, chaos en datacompressie. Het beeld van een doolhof met zijn doorgangen en verrassingen dient om een soort verhaallijn aan te brengen in het boek. Er komt heel wat ter sprake. Om maar wat te noemen: ‘De torens van Hanoi’ levert als toestandsruimte een prachtig plaatje, dat nog vaker in het boek terug komt. De quizmaster met de drie deuren is er natuurlijk ook bij. De spiegel, die wel links en rechts zou verwisselen, maar niet onder en boven, blijkt alleen maar achter en voor te verwisselen. Symmetrie en vlakvullingen, patronen in ruimte en tijd, Turing-machines, ‘Life’, Schoenveters en minimumproblemen.

De schrijver heeft al een hele serie populairwetenschappelijke boeken op zijn naam. Hij verzorgt ook de rubriek ‘Mathematical recreations’ in Scientific American. Onnodig te zeggen dat dit een heel interessant en leesbaar boek is voor een breed publiek. De vertaalster heeft haar werk nauwgezet gedaan. De eerste fout die ik opmerkte, kwam ook in het origineel voor. Een opmerking over de vaktermen: het woord ‘similar’ werd vertaald door ‘gelijksoortig’. Als het over meetkundige zaken gaat zijn we echter gewend aan ‘gelijkvormig’. Het woord ‘graph’ vertalen met grafiek kan juist zijn, maar niet als het gaat over een knoopsel met punten en verbindingslijnen. Een ‘random process’ is niet een ‘willekeurig proces’, maar een toevalsproces (stochastisch proces). Wie zich stoort aan zulke kleinigheden kan het origineel aanschaffen: ‘The Magical Maze’; prijs *f* 34,95; ISBN 0 75380 514 6.

Curve fitting met computeralgebra

[Henk Staal]

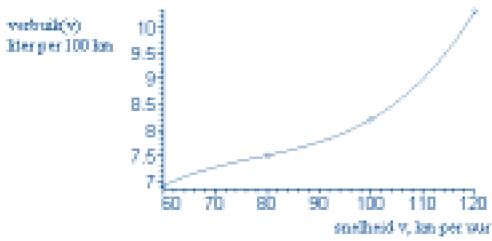
Een uitdagend onderwerp voor de propedeuse van het hoger onderwijs en voor praktische opdrachten in havo en vwo

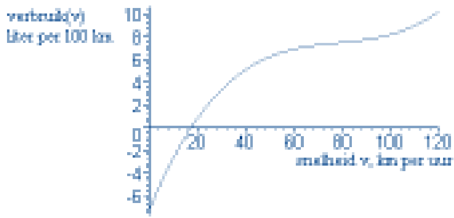
Het vak wiskunde in het hoger beroepsonderwijs wordt de laatste jaren kritisch bekeken. Directies vragen zich af wat je er precies aan hebt als hulpmiddel bij andere vakken en als hulpmiddel in het toekomstig beroep. De aanleiding hiervoor is dat er eisen worden gesteld aan het rendement van het onderwijs. De bekostiging is zo geregeld dat studenten die te lang over hun studie doen, dure studenten zijn en wiskunde is voor veel studenten een struikelblok. Het aantal lesuren wiskunde is aan veel opleidingen al verminderd. Het is dus aan te bevelen meer aandacht te besteden aan de toepasbaarheid en het praktisch nut van wiskunde.

Vanuit deze achtergrond is in september 2000 aan enkele opleidingen (elektrotechniek, chemische technologie, bedrijfswiskunde) van de Hogeschool Alkmaar, de Hogeschool van Amsterdam en de Saxion Hogeschool Enschede een experiment begonnen met een proefeditie van een nieuwe wiskundemethode [1]. Het belangrijkste doel van dit experiment is te onderzoeken of het gebruik van een softwarepakket als Maple een gunstig effect kan hebben op het leren toepassen van wiskunde. Naast de gebruikelijke onderwerpen is ook curve fitting opgenomen in het lesmateriaal, omdat dit veel mogelijkheden biedt voor het toepassen van wiskunde.

Computer en wiskunde

Dat nieuwe apparaten een andere aanpak bij wiskunde mogelijk maken is geen nieuw verschijnsel. We hebben dat al gezien bij de komst van de rekenmachine. De invloed van de rekenmachine heeft zich al duidelijk afgetekend. Ooit was bijvoorbeeld het “met de hand” berekenen van benaderingen van wortels een onderdeel van het curriculum. Een leerling die tegenwoordig een benadering moet hebben van een wortel pakt de rekenmachine, zonder inzicht te hebben in het algoritme waarmee die benadering tot stand komt. De rekenmachine is een “zwarte doos”. Overigens is het ook voor de gevorderde wiskundige onmogelijk om na





snelheid(km/uur)	60	80	100	120
verbruik (liter per 100 km)	6.9	7.5	8.2	10.3

1 **2** **3**

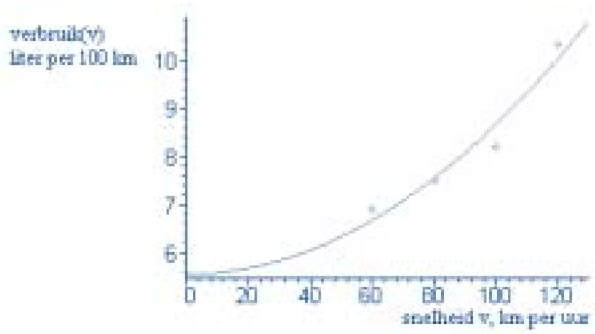
te gaan wat de rekenmachine precies doet, want de programmering van het apparaat is niet toegankelijk voor de gebruiker, we vertrouwen er maar op dat het ding goed in elkaar zit. Het blijft intussen wel belangrijk om de betekenis van een uitdrukking als $\sqrt{50}$ te begrijpen. In het begin (klas 2) zal dat elementair zijn, bijvoorbeeld als de lengte van de zijde van een vierkant waarvan de oppervlakte 50 is, maar dan al kan geprofiteerd worden van de rekenmachine als hulpmiddel bij het toepassen van dit begrip in allerlei situaties. De rekenmachine heeft het toepassen van wiskunde eenvoudiger gemaakt, omdat iemand die een probleem moet oplossen bepaalde onderdelen van de wiskunde gebruiken kan zonder ze te beheersen. Als je bijvoorbeeld voor een bepaalde berekening een benadering nodig hebt van de sinus van een hoek kun je die met de rekenmachine krijgen zonder je te verdiepen in de reeksontwikkeling die zo'n benadering mogelijk maakt.
Het is te verwachten dat de computer een soortgelijke invloed zal hebben op de inhoud van het wiskundeonderwijs. Jarenlang is bijvoorbeeld het "onderzoek de functie en teken de grafiek" een vast onderdeel geweest in eindexamens. Het "onderzoek de functie en teken de grafiek" was voor de leerlingen het sein om volgens een standaardprocedure informatie te verzamelen over een functie waarvan het functievoorschrift gegeven is en met deze gegevens een grafiek te tekenen. Als je zou beschikken over een computeralgebra pakket kun je een programma schrijven voor deze standaardprocedure dat bij elke functie de gewenste informatie geeft. Zover is het nog niet maar onder invloed van de grafische rekenmachine is de manier waarop functies aan de orde komen in het voortgezet onderwijs al aan het verschuiven. Bij veel vervolgopleidingen worden al wel computeralgebra pakketten gebruikt, zowel bij wiskunde als bij vakken waarbij wiskunde een hulpmiddel is. Veel begrippen die thans onderdeel zijn van het wiskundeonderwijs zullen in de toekomst belangrijk blijven, maar het bijbehorende rekenwerk en gemanipuleer met formules kan aan de computer uitbesteed worden. Aan de andere kant kunnen onderwerpen die belangrijk zijn voor het toepassen van wiskunde, maar tot nu toe te ingewikkeld waren, juist met behulp van de computer voor leerlingen en studenten toegankelijk gemaakt worden.

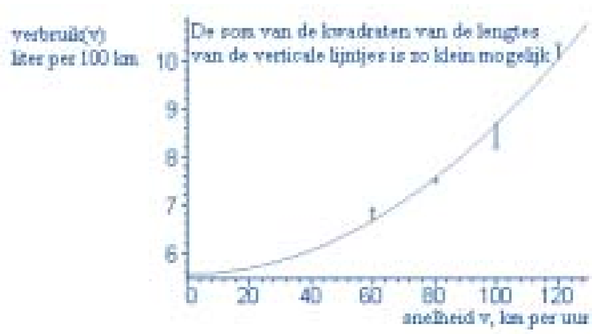
Een voorbeeld

In 1994 kwam in het examen wiskunde-A voor het VWO de volgende formule voor:

$$V = \frac{16{,}9}{}$$

Hier is V de verdubbelingstijd van een populatie colibacteriën; T is de temperatuur in graden Celsius. Opgemerkt werd verder, dat deze formule binnen een bepaald temperatuurgebied een redelijke benadering





4

5

vormt voor het verband tussen *V* en *T*.
De eerste vraag was:

Bereken bij welke temperatuur de groei volgens de formule het sterkst is.

Deze vraag verliest aan uitdaging als je bij het beantwoorden een computeralgebra pakket zou mogen gebruiken. Het komt er dan alleen nog maar op aan om in te zien dat de groei maximaal is als de verdubbelingstijd minimaal is. Daarna kan het minimum van *V* eenvoudig opgevraagd worden. Wel interessant is dan bijvoorbeeld de vraag hoe je aan zo'n formule die het verband geeft tussen *V* en *T* kunt komen. Daar zijn methoden voor maar die leverden tot nu toe in het algemeen zoveel complex rekenwerk op dat ze niet of nauwelijks geschikt zijn voor het wiskundeonderwijs in havo, vwo en het eerste studiejaar van het hoger onderwijs. Dat komt anders te liggen als je werkt met een pakketten als Derive, Maple of Mathematica. In Maple bijvoorbeeld zitten kant en klare methoden voor curve fitting. Je kunt ze gebruiken zonder geconfronteerd te worden met het bijbehorende rekenwerk. Daarom is bij het hiervoor genoemde experiment curve fitting een onderwerp dat al in de propedeuse oriënterend behandeld wordt. Ervaring met het werken met allerlei soorten functies is de enige veronderstelde voorkennis bij dit onderwerp. Het is dus ook te behandelen als praktische opdracht of keuze-onderwerp in de bovenbouw van havo en vwo. De methoden voor curve fitting die in het experiment in de propaedeuse aan de orde komen zijn:
- de Lagrange interpolatie,
- de methode van de kleinste kwadraten,
- de spline methode.

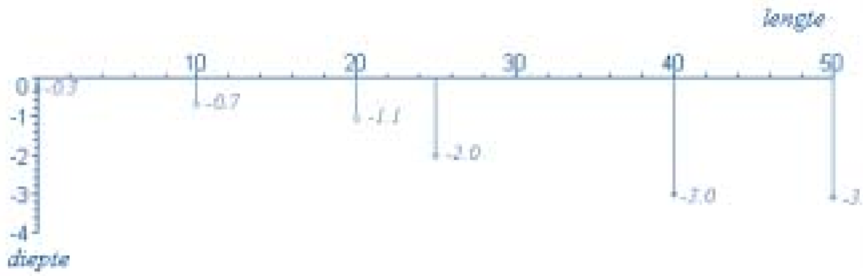
Hieronder licht ik met voorbeelden uit het lesmateriaal toe hoe deze onderwerpen aan de orde komen en welke didactische mogelijkheden ze bieden.

Lagrange interpolatie

De Lagrange interpolatie levert bij n meetpunten een veeltermfunctie van de graad $n-1$, waarvan de grafiek precies door de n meetpunten gaat. Om dit in Maple voor elkaar te krijgen moet je de meetpunten invoeren. Het commando "interp( )" levert het resultaat.
Veronderstel bijvoorbeeld dat meting van het benzineverbruik van een auto bij verschillende snelheden resultaten heeft opgeleverd als in *figuur 1* (op p. 281).
Via "interp( )" krijgen we de functie

$verbruik(v) =$
$0{,}00002708v^3 - 0{,}0063749v^2 + 0{,}52165v - 7{,}300$

De meetpunten en de grafiek van *verbruik*(v) staan in één figuur in *figuur 2* (op p. 281).
De grafiek verloopt vloeiend van het ene meetpunt naar het volgende, maar dat is voorlopig ook het enige







6 **7** **8**

dat je over het praktisch nut van deze methode kunt opmerken. Er zijn namelijk veel meer krommen te bedenken die precies door de meetpunten gaan. Dat blijkt bijvoorbeeld als je er een punt bij verzint, bijvoorbeeld (70; 7,2). Je krijgt dan een veeltermfunctie van de graad 4, waarvan de grafiek ook precies door de oorspronkelijke meetpunten gaat. Extrapoleren kan zeker niet. Dat blijkt als je de grafiek van het verbruik bekijkt op een wat groter gebied (*zie figuur 3* op p. 281).
Nadat studenten meer voorbeelden hebben bekeken met verschillende aantallen meetpunten, kan het volgende verband geconstateerd worden tussen het aantal meetpunten dat je invoert en de graad van de veeltermfunctie die je krijgt met Maple:

Aantal meetpunten	*Graad van de veeltermfunctie*
2	1
3	2
4	3
5	4
...	...

Dit vraagt om een verklaring en dat is een goede aanleiding om de kennis over stelsels lineaire vergelijkingen uit te breiden en daarmee de hierboven geconstateerde regelmaat toe te lichten.

De methode van de kleinste kwadraten

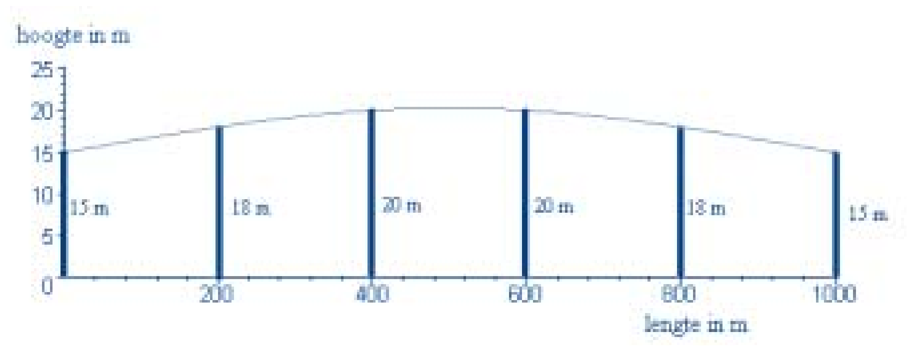
Je kunt bij het zoeken naar een functievoorschrift voor het verbruik een veel beter resultaat krijgen als je van tevoren al weet met wat voor een soort functie het verbruik is weer te geven. Benzineverbruik is afhankelijk van de rolweerstand en de luchtweerstand. Bekend is dat de rolweerstand nauwelijks afhankelijk is van de snelheid en dat de luchtweerstand evenredig is met het kwadraat van de snelheid. We veronderstellen nu dat de functie er als volgt uitziet:

$$verbruik(v) = av^2 + b$$

Met behulp van het commando “leastsquare( )” kun je nu met Maple de parameters *a* en *b* bepalen door toepassing van de methode van de kleinste kwadraten. Je moet dan de meetpunten en het functievoorschrift invoeren en aangeven wat de parameters en wat de variabelen zijn. Dit levert het volgende op:

$$verbruik(v) = 0{,}00030898v^2 + 5{,}5677$$

De grafiek van deze functie staat in *figuur 4*.
Dit lijkt al een veel betere grafiek dan de grafiek die we met Langrange interpolatie kregen. De methode van de kleinste kwadraten kan het gemakkelijkst geïntroduceerd worden aan de hand van voorbeelden waarbij sprake is van een lineaire functie. De methode kan toegelicht worden met plaatjes als in *figuur 5*.



9

Er kan nog een wiskundige verdieping plaatsvinden in de vorm van het beantwoorden van de vraag waarom de methode precies voldoende voorwaarden bevat om de parameters te bepalen.

De spline methode

Veronderstel dat een nieuw te bouwen zwembad een lengte moet krijgen van 50 meter en dat de diepte moet voldoen aan eisen die in *figuur 6* (p. 283) in een schets zijn weergegeven.
We zoeken een functie waarvan de grafiek een kromme is die door de aangegeven punten gaat. Omdat de kromme precies door deze punten moet gaan lijkt de Lagrange interpolatie de aangewezen methode.
Met het commando "interp( )" is de volgende functie te krijgen:
$f(x) = -0{,}74333 \cdot 10^{-6}x^5 + 0{,}000092449x^4 - 0{,}0039157x^3 + 0{,}63905x^2 - 0{,}37250x - 0{,}3.$

De grafiek van $f(x)$ staat samen met de gegevens in *figuur 7* (p. 283).
Dit resultaat is echter niet bruikbaar, want tussen meetpunten zitten 'kuilen' en 'bergen', dat zal niet de bedoeling zijn.
Een zogenaamde spline geeft hier wel een bruikbaar resultaat. Met het commando "spline( )" levert Maple een serie polynomen (tussen elk tweetal opeenvolgende meetpunten een polynoom) van de graad 3 die vloeiend op elkaar aansluiten.

$$s(x) = \begin{cases} -0{,}3 - 0{,}054324x + 0{,}0001432x^3 & 0 \le x < 10 \\ 0{,}559944 - 0{,}31214x + 0{,}025782x^2 - 0{,}00071619x^3 & 10 \le x < 20 \\ -19{,}974 + 2{,}7680x - 0{,}12822x^2 + 0{,}0018505x^3 & 20 \le x < 25 \\ 12{,}535 - 1{,}1328x + 0{,}027800x^2 - 0{,}00022974x^3 & 25 \le x < 40 \\ -1{,}6720 - 0{,}06722x + 0{,}0011598x^2 - 0{,}77319 \cdot 10^{-5}x^3 & 40 \le x \le 50 \end{cases}$$

De grafiek van de functie $s(x)$ staat samen met de gegevens in *figuur 8* (p. 283).
Deze grafiek ziet er beter uit dan de vorige.
Derdegraads veeltermen gedragen zich wat rustiger; je hebt een kleinere kans op niet gewenste extremen dan bij de vijfdegraads veeltermfunctie hierboven.
Ook deze methode geeft een mooie aanleiding om verbanden te leggen met andere onderwerpen. Dat wordt verderop ook gedaan bij het onderwerp differentiëren.
Via de helpfunctie van Maple is meer informatie over splines te krijgen. Er worden polynomen geconstrueerd die voldoen aan de volgende voorwaarden:
- in elk tussenliggend meetpunt zijn linker en rechter polynoom aan elkaar gelijk en dat geldt ook voor de eerste en tweede afgeleiden van linker en rechter polynoom;

- in het eerste en laatste meetpunt zijn de waarden van de polynomen gelijk aan de gegeven waarden en bovendien zijn daar de tweede afgeleiden gelijk aan nul.

Niet alleen de eerste maar ook de tweede afgeleiden krijgen in dit voorbeeld een praktische betekenis. De tweede voorwaarde zorgt er bijvoorbeeld voor dat de grafiek 'voorzichtig' begint en 'voorzichtig' eindigt met een minimale kromming.

Ooit werden er in de bovenbouw opgaven gemaakt als:

De functie f is gegeven door:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 & x \leq 2 \\ bx^2 + x + 1 & 2 < x \end{cases}$$

Voor welke waarden van a en b is f differentieerbaar voor $x = 2$?

Splines vormen een goede aanleiding om het onderwerp differentieerbaarheid toe te lichten met sprekender voorbeelden.

Nog een voorbeeld, een opgave waarbij de kennis over splines en differentiëren gecombineerd moet worden:

Een brug wordt gebouwd op zes pijlers volgens de schets in *figuur 9* (p. 284).

- Geeft het voorschrift van een functie die de hoogte van de brug beschrijft afhankelijk van de lengte. Welke methode geeft hier het beste resultaat, de spline methode of de Lagrange interpolatie? Licht je antwoord toe.
- Waar zit de grootste helling van het wegdek? Hoe groot (in procenten) is de helling op die plaats(en)? Is dat een aanvaardbare helling?
- Vanaf de buitenste pijlers moeten er opritten naar de brug komen. Het wegdek op de opritten heeft geen gebogen vorm maar is recht. De opritten beginnen op een hoogte van 5 m boven de hoogte van de voet van de pijlers. De opritten moeten zonder knik aansluiten op het wegdek. Bereken de lengte van de opritten en de hoek die de opritten maken met het horizontale vlak.

Een mogelijkheid voor verder onderzoek:

- De brug wordt goedkoper als de pijlers korter zouden kunnen zijn. Veronderstel nu dat de middelste twee pijlers in verband met de gewenste doorvaarthoogte 20 m lang moeten blijven en dat de overige pijlers korter kunnen worden. Maak een tabel waarin een verband wordt weergegeven tussen de hoogte van de buitenste pijlers en de maximale helling van de weg.

Conclusie

Op de hiervoor geschetste manier is het mogelijke om studenten al in de propedeuse kennis te laten maken met curve fitting. Door Maple geleverde functies worden beoordeeld op bruikbaarheid voor de oplossing van praktische problemen. De manier waarop Maple aan zo'n functie komt blijft in eerste instantie buiten beschouwing. Dat kan omdat je er vanuit mag gaan dat de wiskundige kennis van de studenten toereikend is om een door Maple geleverde functie te leren analyseren op de betekenis voor de oplossing van het oorspronkelijke praktische probleem. Daarvoor is namelijk nodig dat je een goed inzicht hebt in de verschillende soorten functies (machtsfuncties, veeltermfuncties, exponentiële functies, periodieke functies, enz.) met hun specifieke eigenschappen en dat komt in het vernieuwde wiskundeprogramma van de tweede fase van het voortgezet onderwijs uitvoerig aan bod. In de bij de experimenten gebruikte wiskunde-methode wordt bovendien de kennis rond functies voorafgaand aan curve fitting herhaald en verdiept.

Een voordeel van het uitbesteden van het rekenwerk aan de computer is dat uitgegaan kan worden van realistische gegevens. In het hiervoor aangehaalde voorbeeld uit het VWO examen is dat niet het geval. Dat kon ook niet in 1994. De formule is zo gekozen (een kwadratische functie in de noemer met 'mooie' coëfficiënten) dat het voor leerlingen te doen is om te berekenen dat er voor $T = 37{,}5$ een minimum is voor V. Met andere woorden: de context is bedacht bij de formule. Bij het toepassen van wiskunde is juist het omgekeerde interessant. Door curve fitting in eerste instantie intuïtief te behandelen kun je daar sneller mee beginnen.

Later kan dieper ingegaan worden op de wiskunde die gebruikt wordt bij curve fitting. Zo worden bijvoorbeeld verderop in de methode bij het onderwerp differentiëren ook hogere afgeleiden behandeld om daarmee splines te kunnen verklaren. Intuïties als 'mate van stijging van een grafiek' en 'mate van kromming van een grafiek' die voor praktische toepassingen belangrijk zijn, krijgen dan een wiskundige betekenis.

Noot

[1]

De titel van de bij de experimenten gebruikte methode is: Toegepaste wiskunde voor hoger onderwijs met behulp van Maple, een interactieve methode.

Deze methode zal in mei 2001 verschijnen bij Academic Service, Schoonhoven.

Over de schrijver

Henk Staal (e-mail: h.j.p.staal@efa.nl) is verbonden aan de lerarenopleiding wiskunde van de Educatieve Faculteit van Amsterdam, bij het Instituut voor Bedrijfskunde en Logistiek van de Hogeschool van Amsterdam en bij het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum (APS).

Boekbespreking

Mathematical Olympiad Challenges

Titu Andreescu, Răzvan Gelca

[Jan van de Craats]

Birkhäuser Verlag (2000)

260 p. (softcover); prijs DM 58,00;

ISBN 3-7643-4155-6

Dit is een trainingsboek voor nationale en internationale wiskunde-olympiades. Het niveau is hoog. De auteurs, Roemenen van origine maar enige tijd geleden naar de Verenigde Staten geëmigreerd, zijn de huidige coaches van het US-team bij de Internationale Wiskunde Olympiade. Het boek bevat honderden opgaven, gerangschikt in drie grote hoofdstukken met als onderwerpen Meetkunde en trigonometrie, Algebra en analyse, en Getaltheorie en combinatoriek. Elk hoofdstuk is weer thematisch onderverdeeld in tien paragrafen, die allemaal beginnen met een paar uitgewerkte voorbeeldopgaven. Daarna volgen een stuk of tien olympiade-achtige vraagstukken. Daarmee zijn de eerste 85 bladzijden van het boek gevuld. Vervolgens komen 160 bladzijden met uitwerkingen, en het boek wordt afgesloten met een kort overzicht van termen, notaties en resultaten die bekend worden verondersteld.

Het is allemaal prachtig materiaal, voorbeeldig gepresenteerd en fraai uitgevoerd. Verplichte kost voor onze IWO-gangers, liefst nadat ze al een flink stuk van onze eigen lesbrieven hebben doorgewerkt. En verder kan ik het natuurlijk van harte aanbevelen aan alle wiskundestudenten, en aan iedere wiskundige die zijn vaardigheden wil aanscherpen.

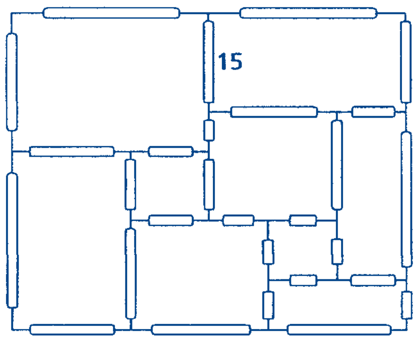
Vooraf

Kees Hoogland schreef in zijn ‘Van de redactietafel’ in het vorige nummer (76-6): ‘De fanatieke puzzelaars onder u zullen het al gemerkt hebben. De vertrouwde stroom puzzels voor de puzzelrubriek door onze zeer gewaarde puzzelredacteur Jan de Geus kent de laatste tijd door allerlei omstandigheden haperingen. We hebben met Jan afgesproken dat met ingang van de nieuwe jaargang de draad weer wordt opgepakt.
In de komende nummers zullen we een poging doen om uit andere bronnen nog wat aardige puzzels voor u te presenteren, zodat de afkickverschijnselen voor de fanatieke puzzelaars draagbaar blijven.’

Zo’n door Kees bedoelde bron is voor dit nummer collega Herman Ligtenberg. Hij was zo vriendelijk ons enkele van de door hem verzamelde puzzels – niet al te moeilijke, denken wij - af te staan. Waarvoor dan ook op deze plaats onze dank.

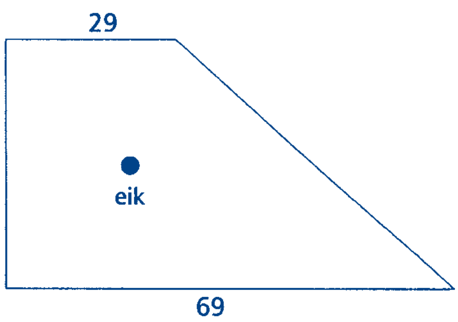
Puzzel 1

Een landheer heeft een rechthoekig gebied verdeeld in negen eveneens rechthoekige percelen (zie figuur). De percelen worden door bomenrijen van elkaar gescheiden. Daarbij slaagt hij erin deze bomen zo te planten dat ieder perceel aan elk van zijn vier zijden evenveel bomen heeft.
Opgemerkt: de lengtes van de bomenrijen in de figuur geven geen indicatie van het aantal bomen in zo’n rij. Het aantal bomen in één van de rijen is reeds aangegeven.
Hoeveel bomen zijn er in totaal geplant?



Puzzel 2

De door vier muren omsloten tuin van ‘Huize Hortensia’ heeft de vorm van een rechthoekig trapezium (zie figuur). De twee evenwijdig zijden (muren) hebben lengtes van 29 m en 69 m. Ergens in het midden van de tuin staat een markante eik. Het opmerkelijke is dat deze boom gelijke afstanden heeft tot elk van de vier muren die de tuin omgeven.
Hoeveel is de oppervlakte van de tuin?
U merkt ongetwijfeld iets bijzonders aan de uitkomst. Kunt u aantonen dat dit in een soortgelijke situatie méér is dan een toevalligheid?



Achteraf

We zullen de oplossingen publiceren in het volgende nummer van Euclides.
Insturen van oplossingen is niet nodig, omdat deze niet meetellen voor de ‘ladder’ van Jan de Geus.

Service pagina

Kalender
In deze kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankeljke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk door geven aan de hoofd-redacteur. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in het lopende schooljaar. Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld.
Doorgeven kan ook via
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
8	27 juni 2001	10 mei 2001

woensdag 16 mei 2001
Examens vwo B (os), vwo B1 en vwo B12 (ns)
maandag 21 mei 2001
Examens mavo/vbo C/D
woesndag 23 mei 2001
Examens havo A (os), havo A12 (ns)
woensdag 30 mei 2001
Examens havo B (os), havo B1 en havo B12 (ns)
donderdag 31 mei 2001
Examens vwo A (os), vwo A1 en vwo A12 (ns)
(os = oude stijl; ns = nieuwe stijl)
Voor Examenbesprekingen zie Euclides 76-6, p. 203.

vrijdag 18 mei 2001
HBO-congres
Hogeschool Domstad, Utrecht
Organisatie Werkgroep HBO van de NVvW

zaterdag 26 mei 2001
Symposium Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs (HKRWO)
Hogeschool Domstad, Utrecht
Zie p. 177 in Euclides 76-4.

woensdag 30 mei 2001
WWW-lympiade 2001
Op de scholen

woensdag 20 juni 2001
Examens 2e tijdvak

vr. 24 en za. 25 augustus (Eindhoven)
vr. 31 aug. en za. 1 sep. (Amsterdam)
Vakantiecursus 2001: Experimentele wiskunde
Organisatie CWI, Amsterdam

zaterdag 17 november
Jaarvergadering/studiedag NVvW

Voor internet-adressen zie de website van de NVvW:
http://www.nvvw.nl/Agenda2.html

Publicaties van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen

Prijzen van de Zebra-boekjes:
Schoolabonnement: 6 exemplaren van 5 delen voor *f* 400,-
Individueel abonnement voor leden: *f* 75,-
Losse boekjes voor leden: *f* 16,50
Deze bedragen zijn inclusief verzendkosten.
Bestellen kan door het juiste bedrag over te maken op Postbanknummer 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven te Utrecht onder vermelding van Zebra (1 t/m 5) of Zebra (6 t/m 10). Zelf ophalen kan in de losse verkoop; ledenprijs op bijeenkomsten *f* 12,50; in de betere boekhandel *f* 16,75.

* *Nomenclatuurrapport Tweedefase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

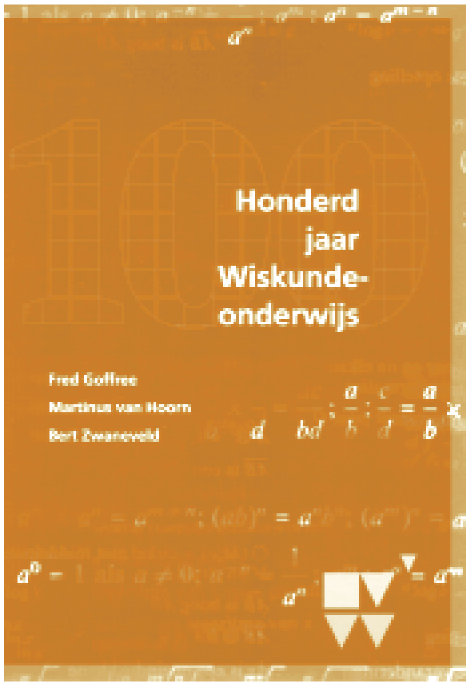
* *Wisforta - wiskunde, formules en tabellen*
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.
ISBN 900165956X; prijs *f* 15,00; te bestellen in de boekhandel.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Zie advertentie hiernaast.

Honderd jaar Wiskundeonderwijs

Een jubileumboek

onder redactie van Fred Goffree, Martinus van Hoorn en Bert Zwaneveld



Honderd jaar Wiskundeonderwijs is geschreven ter gelegenheid van het 75-jarig bestaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. De lezers, die de auteurs voor ogen hadden, zijn leraren wiskunde in het voortgezet onderwijs en leraren wiskunde in opleiding, ouders van leerlingen van nu, oud-leerlingen van het voortgezet onderwijs, onderzoekers van het onderwijs, onderwijskundigen, professionele leerplanontwikkelaars en didactici en alle anderen die het wiskundeonderwijs een warm hart toedragen.

ISBN 90 01 65958 6; 440 pagina's

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Bestelwijze

Schriftelijk, door een briefkaart te zenden aan
NVvW
t.a.v. mevrouw N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19
8251 LB Dronten
onder vermelding van naam, adres, postcode, woonplaats en telefoonnummer, en natuurlijk het aantal gewenste exemplaren, of via Internet door invulling van een bestelformulier (http://www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).

Prijs

Voor leden van de NVvW: ƒ 50,- (ƒ 45,- plus ƒ 5,- verzendkosten).
Voor niet-leden: ƒ 62,50 (ƒ 57,50 plus ƒ 5,- verzendkosten).
Betaling van het verschuldigde bedrag dient gelijktijdig met de bestelling te geschieden op postgirorekening 143917 van de NVvW te Amsterdam, onder vermelding van 'Lustrumboek'.
Na ontvangst van de betaling wordt het boek toegezonden.
Het boek is verkrijgbaar in de boekhandel voor ƒ 79,90.